

Forma canonica di Jordan

Sergio Polini

16 febbraio 2015

Indice

1	Introduzione	1
2	Scomposizione nucleo-immagine	3
3	Scomposizione spettrale	5
3.1	Polinomio minimo	5
3.2	Autospazi generalizzati	6
4	Forma canonica di operatori nilpotenti	15
4.1	Diagrammi di Young	24
4.2	Forma alternativa	28
5	Forma canonica di Jordan nel caso generale	29
5.1	Forma alternativa	33
5.2	Scomposizione diagonalizzabile-nilpotente	33
6	Forma reale di Jordan	35
6.1	Complessificazione di spazi vettoriali reali	36
6.2	Complessificazione di operatori lineari	37
6.3	Operatori reali con autovalori complessi	38
6.4	Dalla forma canonica alla forma reale	40
6.5	Forma alternativa	44
6.6	Scomposizione semisemplice-nilpotente	45
	Riferimenti bibliografici	47

1 Introduzione

La diagonalizzazione di un operatore lineare, quando possibile, risulta comoda in quanto consente di associare all'operatore una matrice diagonale, quindi una matrice di struttura particolarmente semplice.

Perché la diagonalizzazione di un operatore $T : V \rightarrow V$ sia possibile, sono necessarie (e sufficienti) due condizioni:

- a) il polinomio caratteristico di T deve essere completamente riducibile; la condizione è sempre rispettata, grazie al Teorema fondamentale dell'algebra, se V è uno spazio vettoriale complesso; se invece V è uno spazio vettoriale reale, gli autovalori di T devono essere tutti reali;
- b) la molteplicità algebrica di ogni autovalore deve essere uguale alla sua molteplicità geometrica.

Nei paragrafi 2-5 si suppone che solo la prima condizione sia soddisfatta. Si suppone quindi che V sia un \mathbb{K} -spazio vettoriale, con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oppure anche con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ma solo se gli autovalori di T sono tutti reali. In ogni caso, si suppone che per qualche autovalore molteplicità algebrica e geometrica sono diverse. In tal caso, è possibile individuare una base rispetto alla quale la matrice associata a T , pur non potendo essere diagonale, ha comunque una struttura semplice, come descritta nelle definizioni che seguono.

Definizione 1.1. Dato un operatore $T : V \rightarrow V$, se λ è un suo autovalore si dice *blocco di Jordan*, e si indica con $\mathbf{J}_s(\lambda)$, una matrice quadrata di ordine s , minore o al più uguale alla molteplicità algebrica $m_a(\lambda)$ dell'autovalore, triangolare superiore, con gli elementi della diagonale principale tutti uguali a λ e gli elementi della diagonale immediatamente superiore tutti uguali a 1:

$$\mathbf{J}_s(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Definizione 1.2. Una matrice quadrata \mathbf{J} viene detta *matrice di Jordan* se è una matrice diagonale a blocchi in cui ciascun blocco \mathbf{J}_i è un blocco di Jordan:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{J}_2 & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{J}_n \end{bmatrix}$$

Possono esservi più blocchi con lo stesso autovalore sulla diagonale principale.

Definizione 1.3. Dato un operatore $T : V \rightarrow V$, una base \mathcal{J} di V viene detta *base di Jordan* se la matrice associata a T rispetto a \mathcal{J} è una matrice di Jordan. La matrice viene detta *forma canonica di Jordan* di T .

In alcuni testi, tra cui Cullen (1990) e Hirsch e Smale (1974), il blocco di Jordan viene definito in modo diverso: sono uguali a uno gli elementi della diagonale immediatamente *sotto* la diagonale principale. Dopo aver mostrato come costruire i blocchi di Jordan secondo la definizione data, si mostrerà anche come costruirli secondo la definizione alternativa.

Se $T : V \rightarrow V$ è un operatore su uno spazio vettoriale reale, può accadere che il polinomio caratteristico di T non sia completamente riducibile su \mathbb{R} . Si potrebbe 'estendere' V e intenderlo come spazio vettoriale complesso (nel modo che sarà precisato) e ottenere così una forma canonica di Jordan con elementi sia reali che non reali. Tuttavia, come si

vedrà nel paragrafo 6, è anche possibile individuare una base di vettori reali rispetto alla quale la matrice associata a T è una matrice reale e presenta una struttura quasi altrettanto semplice. Una tale matrice viene detta *forma reale di Jordan* di T .

L'esposizione segue quasi pedissequamente Lotta (2003) per la forma canonica. Tuttavia, si inizia con la scomposizione nucleo-immagine seguendo Meyer (2000), in quanto risulta utile per la dimostrazione del Teorema 3.16 (Lotta, 2003, Teorema 2.11), e si usa il Teorema 3.8 (Meyer, 2000, p. 262) nella dimostrazione dei Lemma 4.11 (Lotta, 2003, Proposizione 4.9) e del Teorema 5.1 (Lotta, 2003, Teorema 5.1). Inoltre, si accenna solo brevemente alla relazione tra polinomio minimo e polinomio caratteristico. In particolare, si dà per noto il Teorema di Hamilton-Cayley (dato $T : V \rightarrow V$, se $p(x)$ è il polinomio caratteristico di T , allora $p(T) = 0$; analogamente, se \mathbf{A} è una matrice quadrata e $p(x)$ è il suo polinomio caratteristico, allora $p(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$ – dove \mathbf{O} indica la matrice nulla).

Per la forma reale ci si è basati soprattutto su Hirsch e Smale (1974), con l'utile complemento di Gentile (2009), e Horn e Johnson (1990).

All'esposizione delle forme canonica e reale si aggiungono cenni alle scomposizioni diagonalizzabile-nilpotente e semisemplice-nilpotente, in quanto esse ne consentono l'utilizzo nelle applicazioni più frequenti.

Quasi ogni lemma o teorema è seguito da un esempio, in cui si cerca di associare a ciascun passaggio analitico della dimostrazione un passaggio numerico che aiuti a coglierne meglio il senso. Gli esempi sono adattati prevalentemente da Cullen (1990), Brauer e Nohel (1973) e Hirsch e Smale (1974).

2 Scomposizione nucleo-immagine

Si richiamano in primo luogo una definizione e un teorema ben noti.

Definizione 2.1. Uno spazio vettoriale V si dice *somma diretta* di k suoi sottospazi, e si scrive:

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$$

se qualsiasi vettore $\mathbf{v} \in V$ si può scomporre in modo unico nella somma di k vettori, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_k$, con $\mathbf{v}_i \in V_i$ per ogni $i = 1 \dots, k$.

Teorema 2.2. *Uno spazio vettoriale V può essere scomposto nella somma diretta di suoi sottospazi V_1, \dots, V_k se e solo se:*

- a) $V = V_1 + V_2 + \cdots + V_k$;
- b) $V_i \cap V_j = \{\mathbf{0}\}$ per ogni $i \neq j$;
- c) $\dim_{\mathbb{K}} V = \sum_{i=1}^k \dim_{\mathbb{K}} V_i$.

Per il Teorema della nullità e del rango, dato un operatore lineare $T : V \rightarrow V$, $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(T) + \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(T)$. Da ciò non segue, però, che $V = \text{Ker}(T) \oplus \text{Im}(T)$. Il nucleo è infatti un sottospazio del dominio, mentre l'immagine è un sottospazio del codominio, e può accadere che $\text{Ker}(T) \cap \text{Im}(T) \neq \{\mathbf{0}\}$. Si può però ottenere una scomposizione in somma diretta considerando nuclei e immagini di potenze di T .

Lemma 2.3 (Scomposizione nucleo-immagine). *Dato un operatore $T : V \rightarrow V$, i nuclei delle potenze successive di T formano una successione crescente:*

$$\{\mathbf{0}\} = \text{Ker}(T^0) \subseteq \text{Ker}(T^1) \subseteq \text{Ker}(T^2) \subseteq \cdots \subseteq \text{Ker}(T^i) \subseteq \cdots$$

2. SCOMPOSIZIONE NUCLEO-IMMAGINE

(T^0 è l'operatore identità) mentre le immagini formano una successione decrescente:

$$V = \text{Im}(T^0) \supseteq \text{Im}(T^1) \supseteq \text{Im}(T^2) \supseteq \dots \supseteq \text{Im}(T^i) \supseteq \dots$$

dove i è un intero non negativo. Esiste peraltro un intero non negativo k che stabilizza entrambe le successioni:

$$\text{Ker}(T^{k+j}) = \text{Ker}(T^k), \quad \text{Im}(T^{k+j}) = \text{Im}(T^k) \quad \forall j \geq 1$$

e tale che:

$$V = \text{Ker}(T^k) \oplus \text{Im}(T^k)$$

Dimostrazione. La successione dei nuclei è crescente perché, se $\mathbf{v} \in \text{Ker}(T^i)$, se cioè $T^i(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, si ha anche $T^{i+1}(\mathbf{v}) = T(T^i(\mathbf{v})) = \mathbf{0}$, quindi $\mathbf{v} \in \text{Ker}(T^{i+1})$. La successione delle immagini è decrescente perché, se $\mathbf{v} \in \text{Im}(T^{k+1})$, allora esiste un vettore $\mathbf{u} \in V$ tale che $T^{k+1}(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$, ma $T^{k+1}(\mathbf{u}) = T^k(T(\mathbf{u})) = \mathbf{v}$, quindi esiste un vettore $T(\mathbf{u})$ tale che $\mathbf{v} \in \text{Im}(T^k)$. Non tutte le inclusioni possono però essere strette, in quanto la dimensione di un nucleo non può essere superiore a quella di V , né quella dell'immagine minore di zero. Esiste quindi il più piccolo intero k tale che $\text{Ker}(T^k) = \text{Ker}(T^{k+1})$. Poiché per il Teorema della nullità e del rango vale sempre $\dim \text{Ker}(T^i) + \dim \text{Im}(T^i) = \dim_{\mathbb{K}} V$, si ha anche $\text{Im}(T^k) = \text{Im}(T^{k+1})$.

L'uguaglianza rimane stabile. Infatti, per ogni $i \in \mathbb{Z}^+$ si ha:¹

$$\text{Im}(T^{i+k}) = \text{Im}(T^i T^k) = T^i \text{Im}(T^k) = T^i (\text{Im}(T^{k+1})) = \text{Im}(T^{i+k+1})$$

e analogamente per la successione dei nuclei, sempre per il Teorema della nullità e del rango.

Infine, si ha $\text{Ker}(T^k) \cap \text{Im}(T^k) = \emptyset$ in quanto se $\mathbf{v} \in \text{Ker}(T^k) \cap \text{Im}(T^k)$ allora $T^k(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ e $T^k(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$ per qualche $\mathbf{u} \in V$, quindi $T^{2k}(\mathbf{u}) = T^k(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, che implica $\mathbf{u} \in \text{Ker}(T^{2k}) = \text{Ker}(T^k)$, quindi $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Ne segue, per la formula di Grassmann,

$$\begin{aligned} \dim[\text{Ker}(T^k) + \text{Im}(T^k)] &= \dim \text{Ker}(T^k) + \dim \text{Im}(T^k) - \dim \text{Ker}(T^k) \cap \text{Im}(T^k) \\ &= \dim \text{Ker}(T^k) + \dim \text{Im}(T^k) = \dim V \end{aligned}$$

Si può così concludere che $V = \text{Ker}(T^k) \oplus \text{Im}(T^k)$. □

Esempio 2.4. Sia $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'operatore con matrice associata:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il vettore $\mathbf{v} = (1, 0, 0)$ appartiene sia al nucleo che all'immagine:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v} \in \text{Ker}(T), \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v} \in \text{Im}(T)$$

La successione dei nuclei delle potenze di T è in questo caso strettamente crescente e si stabilizza per $k = 3$. Poiché T^3 è l'operatore nullo ($\mathbf{T}^3 = \mathbf{0}$), $\text{Im}(T^3) = \{\mathbf{0}\}$ e $\text{Ker}(T^3) = \mathbb{R}^3$, quindi non vi è più alcun vettore non nullo che appartenga a entrambi. ||

¹In generale, $\text{Im}(T) = \{\mathbf{v} \in V : \mathbf{u} \in V, \mathbf{v} = T(\mathbf{u})\}$, $\text{Im}(ST) = \{\mathbf{w} \in V : \mathbf{u} \in V, \mathbf{w} = ST(\mathbf{u})\}$, $S\text{Im}(T) = \{S(\mathbf{v}) \in V : \mathbf{u} \in V, S(\mathbf{v}) = ST(\mathbf{u})\}$. Poiché $\mathbf{w} = ST(\mathbf{u}) = S(\mathbf{v})$, $\text{Im}(ST) = S\text{Im}(T)$.

Osservazione 2.5. La successione di nuclei considerata nel lemma precedente è tale che la dimensione di $\text{Ker}(T^i)$ per $i < k$ è almeno i . Si ha infatti:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ker}(T^0) & \subsetneq & \text{Ker}(T^1) & \subsetneq & \text{Ker}(T^2) & \subsetneq & \dots \subsetneq \text{Ker}(T^k) = \text{Ker}(T^{k+1}) = \dots \\ \dim = 0 & & \dim \geq 1 & & \dim \geq 2 & & \dim \geq k & \dim \geq k \end{array}$$

Definizione 2.6. Data una struttura algebrica S , si dice *filtrazione* un insieme totalmente ordinato di sottostrutture S_i , con i appartenente a un insieme indice I , tale che si abbia $S_i \subseteq S_j$ se $i \leq j$.

Una struttura algebrica è un insieme su cui siano definite operazioni con un numero finito di operandi. Ne sono esempi gruppi, anelli, campi ecc. e anche gli spazi vettoriali.

Sulla base della definizione, una successione di potenze dei nuclei di un operatore lineare $T : V \rightarrow V$ è una filtrazione su V associata a T .

3 Scomposizione spettrale

3.1 Polinomio minimo

Dato uno spazio vettoriale V , l'insieme degli operatori lineari su V costituisce uno spazio vettoriale in cui la somma e il prodotto per uno scalare $\alpha \in \mathbb{K}$ sono definiti da:

$$\forall \mathbf{v} \in V \quad (S + T)(\mathbf{v}) = S(\mathbf{v}) + T(\mathbf{v}), \quad (\alpha T)(\mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{v})$$

L'elemento neutro è l'operatore nullo, che trasforma ogni vettore di V nel vettore nullo di V . Se p è un polinomio in un operatore T e se $p(T) = 0$, si dice che p *annulla* T . Analogamente, se $\mathbf{T} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ è una matrice quadrata, si dice che p *annulla* \mathbf{T} se $p(\mathbf{T}) = \mathbf{O}$. Il polinomio che annulla T annulla evidentemente anche la matrice associata, quale che sia la base di V .

Se p e q sono due polinomi, il loro prodotto è indicato con pq . La notazione $p(x)$ indica che p è un polinomio in x , mentre $p(x - 3)$ è un polinomio in $x - 3$. Peraltro, anche x o $x - 3$ sono polinomi, pertanto il prodotto di p per $x - 3$, inteso come polinomio, è indicato con $p \cdot (x - 3)$. Se p è un polinomio nell'operatore lineare T , è a sua volta un operatore, quindi $p(T)(\mathbf{v})$ indica l'immagine di \mathbf{v} per l'operatore $p(T)$. Il prodotto tra due polinomi in operatori va inteso come composizione, quindi si scrive $p(T) \circ q(T)$ oppure anche, equivalentemente, $p(T)(q(T))$.

Definizione 3.1. Un polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ viene detto *di grado* n , $\text{gr}(p) = n$, se $a_n \neq 0$, *monico* se $a_n = 1$.

Definizione 3.2. Dato un operatore $T : V \rightarrow V$ si dice *polinomio minimo* di T , e si indica con μ_T , il polinomio monico non nullo di grado minimo che annulla T .

Esempio 3.3. Dato un operatore $T : V \rightarrow V$ con matrice associata:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

3. SCOMPOSIZIONE SPETTRALE

il polinomio minimo di T è $\mu_T = x^2 - 9x + 18 = (x - 6)(x - 3)$. Infatti:

$$(\mathbf{T} - 6\mathbf{I})(\mathbf{T} - 3\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \parallel$$

Osservazione 3.4. Il polinomio minimo è unico. Se vi fossero due polinomi minimi p, q tali che $p(T) = q(T) = 0$, la loro differenza $d = p - q$ avrebbe grado minore, essendo p e q monici, e si avrebbe anche $d = p - q = 0$, quindi $p = q$.

Teorema 3.5. *Dato un operatore lineare $T : V \rightarrow V$, gli autovalori di T sono tutte e sole le radici del polinomio minimo μ_T in $x \in \mathbb{K}$.*

Dimostrazione. Se μ_T è il polinomio minimo di T e λ è un suo autovalore, allora $\mu_T(\lambda) = 0$. Infatti, se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ e $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$, si ha anche $T^k(\mathbf{v}) = \lambda^k\mathbf{v}$ per ogni intero non negativo k , quindi per qualsiasi polinomio p si ha $p(T)(\mathbf{v}) = p(\lambda)(\mathbf{v})$. In particolare ciò vale per il polinomio minimo e ne segue: $\mu_T(T)(\mathbf{v}) = \mathbf{0} = \mu_T(\lambda)(\mathbf{v})$ dove $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ e pertanto $\mu_T(\lambda) = 0$.

Viceversa, se $\mu_T(\lambda) = 0$, allora $(x - \lambda)$ divide μ_T e si può scrivere $\mu_T = q \cdot (x - \lambda)$ dove q è un polinomio di grado minore di quello di μ_T . Dal momento che μ_T annulla T , si ha anche $q(T) \circ (T - \lambda Id) = 0$. Se λ non fosse un autovalore di T , l'operatore $T - \lambda Id$ (dove Id è l'operatore identità) sarebbe invertibile e, moltiplicando per il suo inverso entrambi i membri dell'ultima uguaglianza, si otterrebbe $q(T) = 0$, cioè q annullerebbe T e avrebbe grado minore di quello del polinomio minimo. \square

Immediata conseguenza del teorema è che il polinomio minimo divide il polinomio caratteristico.

3.2 Autospazi generalizzati

Definizione 3.6. Dati un operatore $T : V \rightarrow V$ e un sottospazio $W \subseteq V$, si dice che W è invariante per T , o T -invariante, se $T(W) \subseteq W$, cioè se per ogni $\mathbf{v} \in W$ si ha $T(\mathbf{v}) \in W$.

Definizione 3.7. Un operatore $T : V \rightarrow V$ viene detto *somma diretta* di k operatori T_1, \dots, T_k :

$$T = T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_k$$

se:

a) V può essere scomposto nella somma diretta di sottospazi invarianti per T :

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k, \quad T(V_i) \subseteq V_i \quad \forall i = 1, \dots, k$$

b) ciascun T_i è la restrizione di T a uno di tali sottospazi V_i :

$$\mathbf{v} \in V_i \quad T(\mathbf{v}) = T_i(\mathbf{v}) \quad \forall i = 1, \dots, k$$

Teorema 3.8. *A un operatore lineare $T : V \rightarrow V$ può essere associata una matrice \mathbf{T} diagonale a blocchi, rispetto a un'opportuna base \mathcal{B} , se e solo se V può essere scomposto nella somma diretta di sottospazi T -invarianti.*

3. SCOMPOSIZIONE SPETTRALE

Dimostrazione. Siano n la dimensione di V e $W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ la sua scomposizione in somma diretta di sottospazi invarianti, di dimensioni n_1, \dots, n_k . Sia:

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_{11}, \dots, \mathbf{b}_{1n_1}, \dots, \mathbf{b}_{k1}, \dots, \mathbf{b}_{kn_k}\}$$

una base di V in cui i successivi sottoinsiemi di n_i elementi costituiscono basi per W_i , $i = 1, \dots, k$. Le colonne di \mathbf{T} sono costituite dalle coordinate rispetto a \mathcal{B} delle immagini per T degli elementi di \mathcal{B} . Se W_1 è invariante, le immagini degli elementi della sua base, $\mathbf{b}_{11}, \dots, \mathbf{b}_{1n_1}$, appartengono a W_1 , quindi le loro coordinate rispetto ad essa sono non tutte nulle, mentre sono tutte nulle quelle rispetto ai restanti elementi di \mathcal{B} . Analogamente per i restanti sottospazi. Si ha quindi:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2 & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{A}_k \end{bmatrix}$$

dove ciascun blocco \mathbf{A}_i è una matrice quadrata di n_i colonne (tante quanti sono gli elementi della base di W_i) e n_i righe (tante quante sono le coordinate non tutte nulle rispetto a quegli stessi elementi).

Viceversa, se la matrice \mathbf{T} associata a T rispetto a una base \mathcal{B} è diagonale a blocchi, i vettori che siano combinazione lineare solo degli elementi $\{\mathbf{b}_{i1}, \dots, \mathbf{b}_{in_i}\}$ di \mathcal{B} , corrispondenti al blocco \mathbf{A}_i , hanno immagini per T in cui sono non tutte nulle solo le coordinate rispetto a quegli stessi elementi, quindi V è scomponibile nella somma diretta di sottospazi invarianti. \square

Esempio 3.9. Sia $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'operatore lineare con matrice associata rispetto alla base canonica:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & -16 & -22 \\ 0 & 3 & 10 & 14 \\ 4 & 8 & 12 & 14 \end{bmatrix}$$

Fissata la base:

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4\} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

\mathbb{R}^4 è scomponibile nella somma diretta di due sottospazi invarianti, con basi costituite, rispettivamente, dai primi due e dagli ultimi due elementi di \mathcal{B} . Infatti,

$$\mathbf{T}\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2, \quad \mathbf{T}\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\mathbf{b}_1 + 4\mathbf{b}_2$$

3. SCOMPOSIZIONE SPETTRALE

e anche:

$$\mathbf{Tb}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 5\mathbf{b}_3 + 7\mathbf{b}_4, \quad \mathbf{Tb}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 6\mathbf{b}_3 + 8\mathbf{b}_4$$

Le colonne della matrice \mathbf{Q} di conversione dalla base \mathcal{B} alla base canonica non sono altro che gli elementi di \mathcal{B} , e si ha:

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{TQ} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & -16 & -22 \\ 0 & 3 & 10 & 14 \\ 4 & 8 & 12 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Si può notare che le colonne di $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{TQ}$ non sono altro che le coordinate rispetto a \mathcal{B} delle immagini per T degli elementi di \mathcal{B} . Si può anche verificare facilmente che, se un vettore \mathbf{v} appartiene al primo dei due sottospazi, è esprimibile come una combinazione lineare del tipo $a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + 0\mathbf{b}_3 + 0\mathbf{b}_4$; moltiplicando la matrice $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{TQ}$ per un tale vettore, si ottiene comunque un vettore con coordinate nulle rispetto a $\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4$. Analogamente per un vettore appartenente al secondo sottospazio. ||

Se un operatore $T : V \rightarrow V$ è diagonalizzabile, V può essere scomposto nella somma diretta di sottospazi invarianti costituiti dagli autospazi associati agli autovalori, T può essere scomposto nella somma diretta di operatori ristretti ai singoli sottospazi. La matrice associata a T rispetto a una base di autovettori è diagonale, è cioè diagonale a blocchi con blocchi tutti di ordine 1. Condizioni perché ciò avvenga sono che il polinomio caratteristico sia completamente riducibile su \mathbb{K} e che la dimensione di ciascun autospazio, detta molteplicità geometrica del relativo autovalore, sia uguale alla molteplicità algebrica dell'autovalore. Se T non è diagonalizzabile, è comunque possibile scomporre V nella somma di autospazi *generalizzati*, ciascuno di dimensione pari alla molteplicità algebrica del relativo autovalore. Se λ è un autovalore di T , l'autospazio associato a λ è il nucleo di $T - \lambda Id$, l'autospazio generalizzato è invece il nucleo di una potenza di $T - \lambda Id$ il cui esponente è la molteplicità di λ nel polinomio minimo.

Definizione 3.10. Dati un operatore $T : V \rightarrow V$ e un suo autovalore λ , si dice *indice* di λ la molteplicità $s(\lambda)$ di λ come radice del polinomio minimo di T . Il sottospazio di V definito da:

$$E_\lambda = \text{Ker} \left((T - \lambda Id)^{s(\lambda)} \right)$$

viene detto *autospazio generalizzato* di λ .

Teorema 3.11. Dato un operatore $T : V \rightarrow V$, se il suo polinomio minimo è il prodotto di due polinomi monici ϕ_1 e ϕ_2 primi tra loro, allora:

1) $V = \text{Ker}(\phi_1(T)) \oplus \text{Ker}(\phi_2(T));$

2) i sottospazi $V_1 = \text{Ker}(\phi_1(T))$ e $V_2 = \text{Ker}(\phi_2(T))$ sono entrambi invarianti per T e, posto $T_i = T|_{V_i} : V_i \rightarrow V_i, i = 1, 2$, risulta:

$$\mu_{T_1} = \phi_1, \quad \mu_{T_2} = \phi_2$$

3. SCOMPOSIZIONE SPETTRALE

Dimostrazione. 1) Poiché ϕ_1 e ϕ_2 sono primi tra loro, per l'identità di Bézout esistono due polinomi α e β tali che:²

$$1 = \alpha\phi_1 + \beta\phi_2$$

Applicando i polinomi a T si ha:

$$Id = \alpha(T) \circ \phi_1(T) + \beta(T) \circ \phi_2(T) \quad (1)$$

Ne segue che, se $V_1 = \text{Ker}(\phi_1(T))$ e $V_2 = \text{Ker}(\phi_2(T))$, per $\mathbf{v} \in V_1 \cap V_2$ si ha:

$$\mathbf{v} = \alpha(T)(\phi_1(T)(\mathbf{v})) + \beta(T)(\phi_2(T)(\mathbf{v})) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

quindi $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$. Peraltro, se $\mathbf{v} \in V$ dalla (1) segue anche:

$$\mathbf{v} = \phi_1(T)(\alpha(T)(\mathbf{v})) + \phi_2(T)(\beta(T)(\mathbf{v})) = \mathbf{u} + \mathbf{w}$$

Essendo per ipotesi $\mu_T(T) = \phi_1(T) \circ \phi_2(T) = \phi_2(T) \circ \phi_1(T) = 0$,

$$\phi_2(T)(\mathbf{u}) = \phi_2(T)(\phi_1(T)(\alpha(T)(\mathbf{v}))) = \mathbf{0}, \quad \phi_1(T)(\mathbf{w}) = \phi_1(T)(\phi_2(T)(\beta(T)(\mathbf{v}))) = \mathbf{0}$$

quindi \mathbf{v} è somma di vettori appartenenti il primo a V_2 e l'altro a V_1 . Si può così concludere che $V = V_1 \oplus V_2$.

2) Essendo $\phi_i(T)$ un polinomio, gli operatori T e $\phi_i(T)$ commutano;³ ciò consente di scrivere:

$$\mathbf{v} \in V_i \Rightarrow \phi_i(T)(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \Rightarrow T(\phi_i(T)(\mathbf{v})) = \mathbf{0} \Rightarrow \phi_i(T)(T(\mathbf{v})) = \mathbf{0} \Rightarrow T(\mathbf{v}) \in V_i$$

da cui segue che i sottospazi V_i sono invarianti per T . Siano ora μ' e μ'' i polinomi minimi, rispettivamente, di V_1 e V_2 . È evidente che ϕ_i annulla la restrizione di T al sottospazio V_i , $T|_{V_i}$, quindi:

$$\mu' \mid \phi_1, \quad \mu'' \mid \phi_2 \quad (2)$$

(μ' divide ϕ_1 e μ'' divide ϕ_2). Risulta inoltre $\mu'\mu'' = \mu_T$. Infatti, se $\mathbf{v} \in V_1$ si ha:

$$\mu''(T)(\mu'(T)(\mathbf{v})) = \mu''(T)(\mu'(T|_{V_1})(\mathbf{v})) = \mathbf{0} \Rightarrow (\mu'\mu'')(T|_{V_1}) = 0$$

e, analogamente, $(\mu'\mu'')(T|_{V_2}) = 0$, quindi $(\mu'\mu'')(T) = 0$ e $\mu_T = \mu'\mu''$. Ne segue che $\text{gr}(\phi_1) + \text{gr}(\phi_2) = \text{gr}(\mu') + \text{gr}(\mu'')$, ma per la (2) deve essere $\text{gr}(\mu') \leq \text{gr}(\phi_1)$ e $\text{gr}(\mu'') \leq \text{gr}(\phi_2)$, e pertanto $\text{gr}(\phi_1) = \text{gr}(\mu')$ e $\text{gr}(\phi_2) = \text{gr}(\mu'')$. Essendo ϕ_1 e ϕ_2 entrambi monici, coincidono rispettivamente con μ' e μ'' . \square

Corollario 3.12. *Sotto le ipotesi del Teorema 3.11, si ha anche:*

$$\text{Ker}(\phi_1(T)) = \text{Im}(\phi_2(T)), \quad \text{Ker}(\phi_2(T)) = \text{Im}(\phi_1(T))$$

Dimostrazione. Dall'ipotesi $\mu_T(T) = \phi_1(T)\phi_2(T) = \mathbf{0}$ segue $\text{Im}(\phi_1(T)) \subseteq \text{Ker}(\phi_2(T))$, in quanto i vettori $(\phi_1(T))(\mathbf{v})$ appartengono a $\text{Ker}(\phi_2(T))$. Si ha inoltre uguaglianza perché, essendo $V = \text{Ker}(\phi_1(T)) \oplus \text{Ker}(\phi_2(T))$,

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(\phi_1(T)) = \dim_{\mathbb{K}} V - \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(\phi_1(T)) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(\phi_2(T))$$

Analogamente per $\text{Im}(\phi_2(T)) = \text{Ker}(\phi_1(T))$. \square

²L'identità di Bézout afferma che se a e b sono interi non entrambi nulli e il loro massimo comun divisore è d , allora esistono due interi x e y tali che $ax + by = d$. L'identità può essere estesa ai polinomi.

³Ad esempio, $T(T - 6Id) = T^2 - 6T = (T - 6Id)T$.

3. SCOMPOSIZIONE SPETTRALE

Esempio 3.13. Il polinomio minimo della matrice \mathbf{T} proposta nell'Esempio 3.3 è $\mu_T(x) = \phi_1(x)\phi_2(x) = (x-6)(x-3)$. Applicando i polinomi alla matrice si ottiene:

$$\phi_1(\mathbf{T}) = \mathbf{T} - 6\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \phi_2(\mathbf{T}) = \mathbf{T} - 3\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Basi per i nuclei delle due matrici sono, rispettivamente:

$$\text{Ker}(\phi_1(\mathbf{T})) : \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{Ker}(\phi_2(\mathbf{T})) : \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

I tre vettori sono linearmente indipendenti, quindi l'unione delle due basi costituisce una base per V . Basi per le immagini sono:

$$\text{Im}(\phi_1(\mathbf{T})) : \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{Im}(\phi_2(\mathbf{T})) : \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

e si vede che l'immagine di $\phi_1(\mathbf{T})$ è uguale al nucleo di $\phi_2(\mathbf{T})$ e viceversa. Si può anche notare che, essendo $V = \text{Ker}(\phi_1(\mathbf{T})) \oplus \text{Ker}(\phi_2(\mathbf{T}))$, qualsiasi vettore $\mathbf{v} \in V$ può essere scomposto nella somma di due vettori $\mathbf{u} \in \text{Ker}(\phi_1(\mathbf{T}))$ e $\mathbf{w} \in \text{Ker}(\phi_2(\mathbf{T}))$, che ϕ_1 annulla il primo e ϕ_2 annulla il secondo e che, pertanto, $\phi_1(T) \circ \phi_2(T)$ annulla T . Ad esempio, se \mathbf{u} è il vettore della base di $\text{Ker}(\phi_1(\mathbf{T}))$ e \mathbf{w} è la somma dei vettori della base di $\text{Ker}(\phi_2(\mathbf{T}))$, se quindi $\mathbf{v} = (2, 0, 1)$, si ha ovviamente $(\mathbf{T} - 6\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0}$ e $(\mathbf{T} - 3\mathbf{I})\mathbf{w} = \mathbf{0}$, ma anche $(\mathbf{T} - 6\mathbf{I})(\mathbf{T} - 3\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Ciò in quanto l'immagine di $(\mathbf{T} - 3\mathbf{I})$ coincide col nucleo di $(\mathbf{T} - 6\mathbf{I})$:

$$(\mathbf{T} - 3\mathbf{I})\mathbf{v} = (3, -3, 3) \in \text{Ker}(\mathbf{T} - 6\mathbf{I}) \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{T} - 6\mathbf{I})(\mathbf{T} - 3\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \parallel$$

Lemma 3.14. Dato un operatore $T : V \rightarrow V$, $\dim_{\mathbb{K}} V = n$, se esistono un $\lambda \in \mathbb{K}$ e un intero $k \geq 1$ tali che $(x - \lambda)^k$ annulla T , il polinomio caratteristico di T è $p_T = (-1)^n(x - \lambda)^n$.

Dimostrazione. Se $\lambda = 0$, se cioè $T^k(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ per ogni \mathbf{v} , per dimostrare che $p_T = (-1)^n x^n$ si può procedere per induzione.

Se $n = 1$, l'operatore T non è altro che la moltiplicazione per uno scalare e se λ ne è l'autovalore, se cioè $T(x) = \lambda x$, lo scalare è λ . Per $\lambda = 0$, si ha $T = 0$ e $p_T = -x$.

Sia l'asserto vero per $n - 1$, con $n > 1$. Se $\lambda = 0$ il nucleo di T ha dimensione maggiore di zero. Fissato un $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{v} \in \text{Ker}(T)$, sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ una base di V con $\mathbf{b}_1 = \mathbf{v}$. Se W è il sottospazio generato da $\{\mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$, allora $V = \text{span}(\mathbf{v}) \oplus W$ e si possono considerare la proiezione $P : V \rightarrow W$ e l'operatore:

$$S : W \rightarrow W, \quad S(\mathbf{w}) = P(T(\mathbf{w}))$$

Vale l'uguaglianza:

$$S^m(\mathbf{w}) = P^m(T(\mathbf{w})) \quad \forall \mathbf{w} \in W$$

è infatti vera per $m = 0$ e $m = 1$, e se è vera per $m > 1$ lo è anche per $m + 1$:

$$\begin{aligned} S^{m+1}(\mathbf{w}) &= S(S^m(\mathbf{w})) = S(P^m(T(\mathbf{w}))) = P(T(P^m(T(\mathbf{w})))) = P(T(T^m(\mathbf{w}))) \\ &= P(T^{m+1}(\mathbf{w})) \end{aligned}$$

3. SCOMPOSIZIONE SPETTRALE

in quanto \mathbf{v} non appartiene alla base dell'immagine di T e, pertanto, $T(\mathbf{w}) \in W$. Applicando l'ipotesi induttiva a S , si ottiene $p_S = (-1)^{n-1}(x - \lambda)^{n-1}$. D'altra parte, la prima colonna della matrice associata a T rispetto a \mathcal{B} è nulla, quindi:

$$p_T = (-x) \cdot p_S = (-1)^n(x - \lambda)^n$$

Il lemma è quindi dimostrato per $\lambda = 0$. Nel caso generale, se $(T - \lambda Id)^k = 0$, l'operatore $S = (T - \lambda Id)$, per quanto appena dimostrato, ha polinomio minimo $p_S = (-1)^n x^n$. Ma per ogni $x \in \mathbb{K}$ si ha $p_T(x) = p_S(x - \lambda)$, quindi $p_T = (-1)^n(x - \lambda)^n$. \square

Esempio 3.15. Siano T un operatore con unico autovalore $\lambda = 2$, quindi $(T - 2Id)^k(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ per qualche k e per ogni \mathbf{v} , e $S = T - 2Id$. Le rispettive matrici associate siano:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si verifica facilmente che $k = 3$: $(\mathbf{T} - 2\mathbf{I})^3 = \mathbf{S}^3 = \mathbf{O}$, cioè che $(x - 2)^3$ annulla T . La matrice \mathbf{S} ha l'unico autovalore $\lambda = 0$ e il suo polinomio caratteristico è:

$$p_S = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = (-1)^3 x^3$$

Il polinomio caratteristico di \mathbf{T} è invece:

$$p_T = \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 0 \\ 0 & 2-x & 1 \\ 0 & 0 & 2-x \end{vmatrix} = (-1)^3(x-2)^3$$

ovvero $p_T(x) = p_S(x - 2)$. ||

Teorema 3.16. Se $T : V \rightarrow V$ è un operatore, λ un suo autovalore e T_λ l'operatore $T - \lambda Id$, allora:

1) l'indice $s(\lambda)$ di λ è uguale al minimo intero positivo per cui $\text{Ker}(T_\lambda^k) = \text{Ker}(T_\lambda^{k+1})$:

$$s(\lambda) = \min \{k \in \mathbb{Z}^+ : \text{Ker}(T_\lambda^k) = \text{Ker}(T_\lambda^{k+1})\}$$

2) $s(\lambda)$ è compreso tra 1 e la molteplicità algebrica $m_a(\lambda)$ di λ , che a sua volta è uguale alla dimensione dell'autospazio generalizzato E_λ :

$$1 \leq s(\lambda) \leq m_a(\lambda) = \dim E_\lambda$$

Dimostrazione. Per la Definizione 3.10 di indice, $\mu_T = (x - \lambda)^{s(\lambda)} \cdot q$, dove q è un polinomio di cui λ non è radice. Per il Teorema 3.11,

$$V = E_\lambda \oplus \text{Ker}(q(T)) \tag{3}$$

Per il Corollario 3.12, l'uguaglianza può essere riscritta nella forma:

$$V = E_\lambda \oplus \text{Im}(T_\lambda^{s(\lambda)}) \tag{4}$$

3. SCOMPOSIZIONE SPETTRALE

1) Si dimostra in primo luogo che $\text{Ker}(T_\lambda^{s(\lambda)+1}) = \text{Ker}(T_\lambda^{s(\lambda)})$. Ciò equivale a dimostrare che se $\mathbf{z} \in \text{Ker}(T_\lambda^{s(\lambda)+1})$ e $\mathbf{v} = T_\lambda^{s(\lambda)}(\mathbf{z})$, allora $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Per la (4), è sufficiente dimostrare che $\mathbf{v} \in E_\lambda$, cioè che $T_\lambda^{s(\lambda)}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ e infatti,

$$T_\lambda^{s(\lambda)}(\mathbf{v}) = T_\lambda^{2s(\lambda)}(\mathbf{z}) = T_\lambda^{s(\lambda)-1}(T_\lambda^{s(\lambda)+1}(\mathbf{z})) = \mathbf{0}$$

Se poi fosse $\text{Ker}(T_\lambda^{h+1}) = \text{Ker}(T_\lambda^h)$ per un $h < s(\lambda)$, per il Lemma 2.3 ne seguirebbe $\text{Ker}(T_\lambda^h) = \text{Ker}(T_\lambda^k)$ per qualsiasi $k \geq h$ e, in particolare,

$$\text{Ker}(T_\lambda^h) = \text{Ker}(T_\lambda^{s(\lambda)}) \equiv E_\lambda$$

Si potrebbe così riscrivere la (3) nella forma:

$$V = \text{Ker}(T_\lambda^h) \oplus \text{Ker}(q(T)) \quad (5)$$

Inoltre, ancora per il Lemma 2.3, si potrebbe riscrivere la (4) nella forma:

$$V = \text{Ker}(T_\lambda^h) \oplus \text{Im}(T_\lambda^h) \quad (6)$$

Tutto ciò però implicherebbe $\text{Im}(T_\lambda^h) = \text{Ker}(q(T))$, nonché $(x - \lambda)^h \cdot q = 0$. Infatti, dalla (5) seguirebbe la possibilità di scomporre qualsiasi vettore $\mathbf{v} \in V$ nella somma di due vettori $\mathbf{u} \in \text{Ker}(T_\lambda^h)$ e $\mathbf{w} \in \text{Ker}(q(T))$, il primo annullato da (T_λ^h) , il secondo da $q(T)$, e si avrebbe:

$$T_\lambda^h(\mathbf{v}) = T_\lambda^h(\mathbf{u}) + T_\lambda^h(\mathbf{w}) = T_\lambda^h(\mathbf{w})$$

Se $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ (in caso contrario, chiaramente $q \cdot (x - \lambda)^h$ annullerebbe T), si otterrebbe un vettore $T_\lambda^h(\mathbf{w})$ appartenente a $\text{Im}(T_\lambda^h) = \text{Ker}(q(T))$; si avrebbe pertanto $q(T)(T_\lambda^h(\mathbf{w})) = \mathbf{0}$. Vi sarebbe così un polinomio annullatore di grado minore rispetto a μ_T .

2) Sia $k = \dim_{\mathbb{K}} E_\lambda$. Poiché i sottospazi E_λ e $\text{Ker}(q(T))$ sono invarianti e scompongono V in somma diretta (Teorema 3.11), il polinomio caratteristico di T è:

$$p_T = p_{T_1} \cdot p_{T_2}$$

dove T_1 e T_2 sono le restrizioni di T ai due sottospazi. Per il Teorema 3.11, il polinomio minimo di T_1 è $(x - \lambda)^{s(\lambda)}$ e, per il Lemma 3.14, il suo polinomio caratteristico è:

$$p_{T_1} = (-1)^k (x - \lambda)^k$$

La molteplicità algebrica di λ è quindi k , uguale a $\dim_{\mathbb{K}} E_\lambda$. Per mostrare infine che $m_a(\lambda) \geq s(\lambda)$, basta osservare che, per quanto visto nel punto 1), $\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(T_\lambda^i) > \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(T_\lambda^{i-1})$ per $i = 0, \dots, s(\lambda)$, quindi $m_a(\lambda) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(T_\lambda^{s(\lambda)}) \geq s(\lambda)$ (Osservazione 2.5). \square

Esempio 3.17. Dato un operatore $T : V \rightarrow V$ con matrice associata:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 17 & -8 & -12 & 14 \\ 46 & -22 & -35 & 41 \\ -2 & 1 & 4 & -4 \\ 4 & -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

3. SCOMPOSIZIONE SPETTRALE

gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$ e il polinomio minimo è $\mu_T = (x - 1)^2(x + 1)$. Gli indici degli autovalori sono quindi $s(\lambda_1) = 2$ e $s(\lambda_2) = 1$. Ponendo $\mathbf{T}_1 = (\mathbf{T} - \mathbf{I})$, si verifica che sono basi dei nuclei delle prime potenze di \mathbf{T}_1 :

$$\text{Ker}(\mathbf{T}_1) : \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \text{Ker}(\mathbf{T}_1^2) : \left\{ \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \text{Ker}(\mathbf{T}_1^3) : \left\{ \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

cioè che l'indice di λ_1 è uguale all'esponente che stabilizza la successione delle potenze dei nuclei. Vale lo stesso per λ_2 , in quanto sono basi dei nuclei delle potenze di $\mathbf{T}_2 = (\mathbf{T} + \mathbf{I})$:

$$\text{Ker}(\mathbf{T}_2) : \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}, \text{Ker}(\mathbf{T}_2^2) : \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Le molteplicità algebriche degli autovalori sono $m_a(\lambda_1) = 3$ e $m_a(\lambda_2) = 1$ e, come si vede, coincidono con le dimensioni dei nuclei $\text{Ker}(\mathbf{T} - \mathbf{I})^2$ e $\text{Ker}(\mathbf{T} + \mathbf{I})$. Si può rilevare, infine, che $m_a(\lambda_i) \geq s(\lambda_i)$. ||

Teorema 3.18 (Scomposizione spettrale). *Dato un operatore $T : V \rightarrow V$, se il polinomio minimo μ_T è completamente riducibile su \mathbb{K} è possibile scomporre V nella somma diretta degli autospazi generalizzati dei k autovalori:*

$$V = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_k}$$

Ciascun autospazio generalizzato è invariante per T e il polinomio minimo della restrizione di T a E_{λ_i} è $(x - \lambda_i)^{s(\lambda_i)}$. Conseguentemente, T può essere scomposto nella somma diretta di tali restrizioni:

$$T = T_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus T_{\lambda_k}$$

Dimostrazione. Se $k = 1$ non c'è nulla da dimostrare, in quanto $V = \text{Ker}(T - \lambda)^{s(\lambda)}$ e $\mu_T = (x - \lambda)^{s(\lambda)}$. Se $k > 1$, denotando con s_i gli indici degli autovalori, si può scrivere μ_T nella forma:

$$\mu_T = (x - \lambda_1)^{s_1} \cdot q, \quad q = (x - \lambda_2)^{s_2} \cdots (x - \lambda_k)^{s_k}$$

Si ha quindi, per il Teorema 3.11, la scomposizione in sottospazi invarianti:

$$V = \text{Ker}((T - \lambda_1)^{s_1}) \oplus \text{Ker}(q(T))$$

La restrizione di T a $\text{Ker}(T - \lambda_1)^{s_1}$ ha per definizione polinomio minimo $(x - \lambda_1)^{s_1}$. Considerando ora la restrizione di T a $W = \text{Ker}(q(T))$, il suo polinomio minimo è.

$$\mu_{T|_W} = (x - \lambda_2)^{s_2} \cdot q_1, \quad q_1 = (x - \lambda_3)^{s_3} \cdots (x - \lambda_k)^{s_k}$$

Sempre per il Teorema 3.11 si ha:

$$W = \text{Ker}((T|_W - \lambda_2)^{s_2}) \oplus \text{Ker}(q_1(T|_W))$$

quindi anche W può essere scomposto nella somma di sottospazi invarianti, ciascuno di dimensione pari alla molteplicità algebrica del relativo autovalore (che non cambia per effetto di tali restrizioni di T). Inoltre, il polinomio minimo di $\text{Ker}((T|_W - \lambda_2)^{s_2})$ è $(x - \lambda_2)^{s_2}$. Il procedimento può essere iterato un numero finito di volte, portando all'asserto. □

3. SCOMPOSIZIONE SPETTRALE

Esempio 3.19. Sia $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'operatore proposto nell'Esempio 3.17. Il polinomio, $\mu_T = (x - 1)^2(x + 1)$, è completamente riducibile su \mathbb{R} con radici $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$. Pertanto \mathbb{R}^4 è scomponibile nella somma diretta dei due autospazi generalizzati $\text{Ker}((T - Id)^2)$, di dimensione 3, e $\text{Ker}(T + Id)$ di dimensione 1. Le rispettive basi, come individuate nell'Esempio 3.17, sono:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \{ \mathbf{b}_{11} = (-7, 0, 0, 8), \mathbf{b}_{12} = (3, 0, 4, 0), \mathbf{b}_{13} = (1, 2, 0, 0) \} \\ \mathcal{B}_2 &= \{ \mathbf{b}_{21} = (4, 11, 1, 2) \} \end{aligned}$$

Indicando con T_1 e T_2 le restrizioni di T a tali sottospazi, le matrici associate rispetto alle loro basi sono:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ -9/2 & 5/2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_2 = [-1]$$

Per mostrare che $T = T_1 \oplus T_2$, si può prendere un vettore che sia combinazione lineare dei vettori di entrambe le basi \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 :

$$\mathbf{v} = (\mathbf{b}_{11} + \mathbf{b}_{12} + \mathbf{b}_{13}) + \mathbf{b}_{21} = (-3, 2, 4, 8) + (4, 11, 1, 2) = (1, 13, 5, 10)$$

La sua immagine per T è $T(\mathbf{v}) = (-7, -5, -9, -2)$. Le coordinate di $(-3, 2, 4, 8)$ rispetto alla base \mathcal{B}_1 sono $(1, 1, 1)$, quella di $(4, 11, 1, 2)$ rispetto a \mathcal{B}_2 è (1) . Si ha:

$$\begin{aligned} T_1 \left(\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ -9/2 & 5/2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix} \\ T_2 \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) &= [-1] [1]_{\mathcal{B}_2} = [-1]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} -4 \\ -11 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e si può così verificare che:

$$\begin{aligned} T(1, 13, 5, 10) &= T_1(-3, 2, 4, 8) + T_2(4, 11, 1, 2) \\ &= (-3, 6, -8, 0) + (-4, -11, -1, -2) = (-7, -5, -9, -2) \quad \parallel \end{aligned}$$

Corollario 3.20. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un operatore $T : V \rightarrow V$ sia diagonalizzabile è che il suo polinomio minimo sia completamente riducibile su \mathbb{K} e prodotto di fattori lineari:*

$$\mu_T = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_k)$$

con $\lambda_i \neq \lambda_j$ per $i \neq j$.

Dimostrazione. Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ il polinomio minimo è sempre riducibile. Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ è necessario che le radici del polinomio minimo siano tutte reali. Sotto tali condizioni, se μ_T è prodotto di fattori lineari, ciascun autovalore ha indice 1 e, pertanto, il relativo autospazio ha dimensione pari alla sua molteplicità algebrica, quindi T è diagonalizzabile. Se invece qualche autovalore λ_i avesse indice $s_i > 1$, il relativo autospazio sarebbe strettamente incluso nell'autospazio generalizzato $\text{Ker}((T - \lambda_i Id)^{s_i})$ e avrebbe dimensione minore della molteplicità algebrica □

Esempio 3.21. L'operatore dell'Esempio 3.3 è diagonalizzabile (la matrice associata è infatti simmetrica), mentre quello dell'Esempio 3.17 non lo è. Si vede infatti che la dimensione dell'autospazio $\text{Ker}(T - \lambda_1)$ è 2, mentre $m_a(\lambda_1) = 3$. ||

4 Forma canonica di operatori nilpotenti

Definizione 4.1. Un operatore $T : V \rightarrow V$ viene detto *nilpotente* se esiste un $k \in \mathbb{N}$ tale che $T^k = \mathbf{0}$. Il più piccolo intero per cui ciò si verifica viene detto *indice di nilpotenza*. Analogamente, una matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ viene detta nilpotente se $\mathbf{A}^k = \mathbf{0}$ per qualche $k \in \mathbb{N}$.

Teorema 4.2. *Un operatore nilpotente ha il solo autovalore nullo. Inoltre, l'unico operatore nilpotente diagonalizzabile è l'operatore nullo.*

Dimostrazione. Se T è un operatore con autovalori λ_i , una qualsiasi sua potenza ha autovalori λ_i^k , infatti se $T(\mathbf{v}) = \lambda_i \mathbf{v}$ si ha $T^2(\mathbf{v}) = T(T(\mathbf{v})) = \lambda_i^2 \mathbf{v}$. Se $T^k(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ gli autovalori sono tutti nulli, in quanto si ha sempre $T^k(\mathbf{v}) = \lambda_i^k \mathbf{v} = \mathbf{0}$, ma perché sia $\lambda_i^k = 0$ deve aversi $\lambda_i = 0$. Se T è diagonalizzabile, e \mathbf{T} è la sua matrice associata, esiste una matrice invertibile \mathbf{Q} tale che $\mathbf{QDQ}^{-1} = \mathbf{T}$ dove \mathbf{D} è una matrice nulla (è diagonale con gli autovalori, tutti nulli, nella diagonale principale), quindi $\mathbf{T} = \mathbf{0}$. □

Il Teorema 3.18 afferma che, se il polinomio minimo di un operatore $T : V \rightarrow V$ è completamente riducibile su \mathbb{K} , è possibile scomporlo nella somma diretta di operatori $T_{\lambda_i} : E_{\lambda_i} \rightarrow E_{\lambda_i}$, ciascuno con polinomio minimo del tipo $(x - \lambda_i)^{s_i}$. Tali operatori possono a loro volta sempre essere scomposti nella somma di un operatore del tipo $\lambda_i Id$, quindi diagonalizzabile, e di un operatore nilpotente, infatti basta porre:

$$T_{\lambda_i} = \lambda_i Id + N_{\lambda_i}, \quad N_{\lambda_i} = T_{\lambda_i} - \lambda_i Id$$

dove N_{λ_i} è nilpotente con indice di nilpotenza s_i , in quanto l'operatore $N_{\lambda_i}^{s_i} = (T - \lambda_i Id)^{s_i}$, applicato a qualsiasi vettore di E_{λ_i} , dà il vettore nullo. La matrice associata a T_{λ_i} , rispetto a una qualsiasi base, è quindi somma di una matrice diagonale e di una matrice nilpotente.

Esempio 4.3. Nell'Esempio 3.19 si è scomposto un operatore T nella somma diretta di due operatori T_1 e T_2 . Le rispettive matrici associate, rispetto alle basi di due sottospazi invarianti di \mathbb{R}^4 , erano:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ -9/2 & 5/2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_2 = [-1]$$

con polinomi minimi $\mu_1 = (x - 1)^2$ e $\mu_2 = x + 1$. Per T_1 si ha:

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{L}_1 + \mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3/2 & 1/2 & 0 \\ -9/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove \mathbf{N}_1 è nilpotente: $\mathbf{N}_1^2 = \mathbf{0}$, l'unico autovalore è 0. Analogamente per T_2 ; si ha infatti $\mathbf{T}_2 = [-1] + [0]$. ||

Lo studio di un operatore non diagonalizzabile può così essere ricondotto allo studio degli operatori di cui è somma diretta e, in particolare, delle componenti nilpotenti di questi.

Lemma 4.4. *Dato un operatore nilpotente $T : V \rightarrow V$, per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ esiste un indice $i(\mathbf{v})$ tale che:*

$$T^{i(\mathbf{v})}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}, \quad T^j(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0} \quad \forall j < i(\mathbf{v})$$

Dimostrazione. Se T è nilpotente di indice k , la filtrazione di V associata a T data dalla successione dei nuclei di potenze di T si presenta nella forma di inclusioni strette che terminano con un nucleo coincidente con V :

$$\{\mathbf{0}\} = \text{Ker}(T^0) \subsetneq \text{Ker}(T) \subsetneq \text{Ker}(T^2) \subsetneq \dots \subsetneq \text{Ker}(T^{k-1}) \subsetneq \text{Ker}(T^k) = V$$

in quanto T^k ha immagine $\{\mathbf{0}\}$. Si ha quindi che, se un qualsiasi vettore non nullo $\mathbf{v} \in V$ appartiene a $\text{Ker}(T^i)$, ma non appartiene a $\text{Ker}(T^j)$ per ogni $j < i$, si ha $T^j(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$ per ogni $j < i$, poi $T^i(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. \square

Definizione 4.5. Dato un operatore nilpotente $T : V \rightarrow V$, per ogni vettore non nullo $\mathbf{v} \in V$ viene detta *stringa* di origine \mathbf{v} e di lunghezza $i(\mathbf{v})$ l'insieme ordinato di vettori non nulli:

$$S_T(\mathbf{v}) = \{T^{i(\mathbf{v})-1}(\mathbf{v}), T^{i(\mathbf{v})-2}(\mathbf{v}), \dots, T^2(\mathbf{v}), T(\mathbf{v}), \mathbf{v}\}$$

Osservazione 4.6. Indicando con \mathbf{v}_k un vettore che generi una stringa di lunghezza k , la stringa può essere scritta nella forma:

$$S_T(\mathbf{v}_k) = \{T(\mathbf{v}_2), T(\mathbf{v}_3), \dots, T(\mathbf{v}_{k-1}), T(\mathbf{v}_k), \mathbf{v}_k\}$$

oppure anche:

$$S_T(\mathbf{v}_k) = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{k-2}, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_k\}$$

con $T(\mathbf{v}_i) = \mathbf{v}_{i-1}$ per ogni $1 < i \leq k$ e $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{0}$. Infatti:

$$\begin{aligned} T^{k-1}(\mathbf{v}_k) &= T(T^{k-2}(\mathbf{v}_k)) = T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1 \\ T^{k-2}(\mathbf{v}_k) &= T(T^{k-3}(\mathbf{v}_k)) = T(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_2 \\ &\dots \\ T^2(\mathbf{v}_k) &= T(T(\mathbf{v}_k)) = T(\mathbf{v}_{k-1}) = \mathbf{v}_{k-2} \\ T(\mathbf{v}_k) &= T(\mathbf{v}_k) = \mathbf{v}_{k-1} \\ \mathbf{v}_k &= \mathbf{v}_k = \mathbf{v}_k \end{aligned}$$

Lemma 4.7. *I vettori in una stringa per un operatore nilpotente T sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Si può procedere per induzione sulla lunghezza n della stringa. Se $n = 1$ il lemma è vero perché la stringa è costituita da un unico vettore non nullo. Supponendo il lemma vero per $n - 1$, se:

$$a_{n-1}T^{n-1}(\mathbf{v}) + a_{n-2}T^{n-2}(\mathbf{v}) + \dots + a_2T^2(\mathbf{v}) + a_1T(\mathbf{v}) + a_0\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

4. FORMA CANONICA DI OPERATORI NILPOTENTI

applicando T a entrambi i membri si ottiene:

$$\mathbf{0} + a_{n-2}T^{n-1}(\mathbf{v}) + \cdots + a_1T^2(\mathbf{v}) + a_0T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

dove i termini non nulli sono gli elementi della stringa $S_T(T(\mathbf{v}))$ di lunghezza $n - 1$ e, per l'ipotesi induttiva, $a_{n-2} = \cdots = a_1 = 0$. Si ha quindi:

$$a_{n-1}T^{n-1}(\mathbf{v}) + a_{n-2}T^{n-2}(\mathbf{v}) + \cdots + a_2T^2(\mathbf{v}) + a_1T(\mathbf{v}) + a_0\mathbf{v} = a_{n-1}T^{n-1}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

che implica $a_{n-1} = 0$ in quanto $T^{n-1}(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$. □

Esempio 4.8. Dato un operatore nilpotente $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con matrice associata:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

basi per i rispettivi nuclei possono essere:

$$\text{Ker}(\mathbf{T}) : \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad \text{Ker}(\mathbf{T}^2) : \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad \text{Ker}(\mathbf{T}^3) : \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Si vede che, essendo \mathbf{T} nilpotente di indice 3, il nucleo di \mathbf{T}^3 coincide con \mathbb{R}^3 . I tre vettori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ che costituiscono le basi indicate possiedono indici diversi e, pertanto, sono origine di stringhe di lunghezza diversa:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\mathbf{e}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{T}\mathbf{e}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^2\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{T}\mathbf{e}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^2\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^3\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Gli indici sono: $i(\mathbf{e}_1) = 1, i(\mathbf{e}_2) = 2, i(\mathbf{e}_3) = 3$. Le rispettive stringhe sono:

$$\begin{aligned} S_T(\mathbf{e}_1) &= \{\mathbf{e}_1\} \\ S_T(\mathbf{e}_2) &= \{T(\mathbf{e}_2), \mathbf{e}_2\} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \\ S_T(\mathbf{e}_3) &= \{T^2(\mathbf{e}_3), T(\mathbf{e}_3), \mathbf{e}_3\} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \end{aligned}$$

In generale, vettori che siano multipli di \mathbf{e}_1 generano stringhe di lunghezza 1, vettori $a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$ con $b \neq 0$ stringhe di lunghezza 2, vettori $a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3$ con $c \neq 0$ stringhe di lunghezza 3. Ad esempio, per $\mathbf{v} = -\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ si ha:

$$\mathbf{T}\mathbf{v} = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{T}^2\mathbf{v} = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{T}^3\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

quindi $S_T(\mathbf{v}) = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{v}\}$. Si può notare che tutte le stringhe sono insiemi di vettori linearmente indipendenti. ||

Lemma 4.9. Sia $T : V \rightarrow V$ un operatore nilpotente. Un sottospazio $W \subseteq V$ di dimensione d ammette una base \mathcal{J} uguale alla stringa di lunghezza d di un vettore $\mathbf{v} \in W$ se e solo se è invariante per T e la matrice associata alla restrizione di T a W è il blocco di Jordan $\mathbf{J}_d(0)$.

Dimostrazione. Sia \mathbf{v} un vettore non nullo di W che generi una stringa di lunghezza d , base di W . Ponendo $\mathbf{v} = \mathbf{j}_d$, si possono indicare con $\mathbf{j}_1, \dots, \mathbf{j}_d$ i vettori in \mathcal{J} :

$$S_T(\mathbf{j}_d) = \{T^{d-1}(\mathbf{j}_d) = \mathbf{j}_1, \quad T^{d-2}(\mathbf{j}_d) = \mathbf{j}_2, \quad \dots, \quad T(\mathbf{j}_d) = \mathbf{j}_{d-1}, \quad \mathbf{j}_d\}$$

Si ha $T^d(\mathbf{j}_d) = \mathbf{0}$, mentre $T^{d-i}(\mathbf{j}_d) = T(T^{d-(i+1)}(\mathbf{j}_d)) = T(\mathbf{j}_{i+1}) = \mathbf{j}_i$ per $1 \leq i < d$ (v. Osservazione 4.6). Ne segue che W è T -invariante in quanto $T(\mathbf{j}_i) \in S_T(\mathbf{j}_d) \cup \{\mathbf{0}\} \subset W$ per ogni $i = 1, \dots, d$.

Le colonne della matrice associata a $T|_W$ rispetto alla base \mathcal{J} sono le coordinate rispetto a \mathcal{J} delle immagini per T dei suoi elementi. Per quanto appena visto, le immagini sono:

$$T(\mathbf{j}_1) = \mathbf{0}, \quad T(\mathbf{j}_2) = \mathbf{j}_1, \quad \dots, \quad T(\mathbf{j}_{d-1}) = \mathbf{j}_{d-2}, \quad T(\mathbf{j}_d) = \mathbf{j}_{d-1}$$

le cui coordinate rispetto a \mathcal{J} sono le colonne del blocco di Jordan:

$$\mathbf{J}_d(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Viceversa, se W è un sottospazio T -invariante e la matrice associata a $T|_W$ rispetto a una base $\mathcal{J} = \{\mathbf{j}_1, \dots, \mathbf{j}_d\}$ è il blocco di Jordan $\mathbf{J}_d(0)$, si ha:

$$T|_W(\mathbf{j}_1) = \mathbf{0}, \quad T|_W(\mathbf{j}_2) = \mathbf{j}_1, \quad \dots, \quad T|_W(\mathbf{j}_d) = \mathbf{j}_{d-1}$$

quindi la base coincide con la stringa $S_T(\mathbf{j}_d)$. □

Esempio 4.10. Siano $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'operatore:

$$T \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_2 + x_3 \\ x_3 \\ 2x_4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e \mathbf{v} il vettore:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T^2(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T^3(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si tratta di un vettore di indice $i(\mathbf{v}) = 3$, che genera la stringa:

$$S_T(\mathbf{v}) = \{\mathbf{j}_1 = T^2(\mathbf{v}), \quad \mathbf{j}_2 = T(\mathbf{v}), \quad \mathbf{j}_3 = \mathbf{v}\}$$

Il sottospazio W generato da $\mathcal{J} = \{\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3\}$ è T -invariante, in quanto tutte le immagini per T degli elementi di \mathcal{J} appartengono a W :

$$T(\mathbf{j}_1) = T^3(\mathbf{j}_3) = \mathbf{0}, \quad T(\mathbf{j}_2) = T^2(\mathbf{j}_3) = \mathbf{j}_1, \quad T(\mathbf{j}_3) = \mathbf{j}_2$$

Le coordinate rispetto a \mathcal{J} di tali immagini sono:

$$\text{Coord}_{\mathcal{J}}(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{Coord}_{\mathcal{J}}(\mathbf{j}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{Coord}_{\mathcal{J}}(\mathbf{j}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quindi la base \mathcal{J} di W e la matrice associata a \mathcal{J} di $T|_W$ sono, rispettivamente:

$$\mathcal{J} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathbf{T}|_W = \mathbf{J}_3(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Viceversa, se $\mathbf{T}|_W = \mathbf{J}_3(0)$, poiché le coordinate degli elementi di una qualsiasi base rispetto ad essa sono $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$, le coordinate delle loro immagini sono:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

quindi gli elementi della base costituiscono una stringa. ||

Lemma 4.11. *Sia $T : V \rightarrow V$ un operatore nilpotente. La matrice associata è una matrice di Jordan, ovvero esiste una base di Jordan per V , se e solo se esistono k vettori non nulli tali che la base possa essere unione delle loro stringhe.*

Dimostrazione. Siano n la dimensione di V e $\mathcal{J} = \{\mathbf{j}_1, \dots, \mathbf{j}_n\}$ una base di Jordan per V . Per il Teorema 3.8, essendo la matrice di Jordan diagonale a blocchi, V può essere scomposto nella somma di sottospazi invarianti $W_1 \oplus \dots \oplus W_k$, di rispettive dimensioni d_k . Per il Lemma 4.9, a ciascun sottospazio W_i , $i = 1, \dots, k$, appartiene un vettore che genera una stringa di lunghezza d_i .

Viceversa, se esistono k vettori tali che una base possa essere unione delle loro stringhe, poiché è possibile definire sottospazi T -invarianti cui appartengano solo i vettori di una stringa, V può essere scomposto nella somma di sottospazi invarianti. Alla restrizione di T su ciascuno di essi è associata, ancora per il Lemma 4.9, una matrice che è un blocco di Jordan. Inoltre, ancora per il Teorema 3.8, la matrice associata a T è diagonale a blocchi, che sono blocchi di Jordan. Quindi la matrice associata a T una matrice di Jordan. □

Definizione 4.12. Dati uno spazio vettoriale V e un suo sottospazio W , un insieme linearmente indipendente di vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$ viene detto:

- a) *linearmente indipendente modulo W* se $W \cap \text{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \{\mathbf{0}\}$;
- b) *base di V modulo W* se $V = W \oplus \text{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \{\mathbf{0}\}$.

Lemma 4.13. *Sia $T : V \rightarrow V$ un operatore nilpotente con indice di nilpotenza $k \geq 2$. Data la filtrazione:*

$$\{\mathbf{0}\} = \text{Ker}(T^0) \subsetneq \text{Ker}(T) \subsetneq \text{Ker}(T^2) \subsetneq \text{Ker}(T^3) \subsetneq \cdots \subsetneq \text{Ker}(T^{k-1}) \subsetneq \text{Ker}(T^k) = V$$

se i vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in \text{Ker}(T^i)$, con $1 < i \leq k$, sono linearmente indipendenti modulo $\text{Ker}(T^{i-1})$, allora i vettori $T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_m)$ sono linearmente indipendenti modulo $\text{Ker}(T^{i-2})$.

Dimostrazione. Se i vettori \mathbf{v}_j , $j = 1, \dots, m$, appartengono a $\text{Ker}(T^i)$ e sono linearmente indipendenti modulo $\text{Ker}(T^{i-1})$, appartengono a $\text{Ker}(T^i) \setminus \text{Ker}(T^{i-1})$. Conseguentemente, i corrispondenti vettori $T(\mathbf{v}_j)$ appartengono a $\text{Ker}(T^{i-1}) \setminus \text{Ker}(T^{i-2})$, infatti:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{v}_j \neq \mathbf{0}, & \dots & T^{i-2}(\mathbf{v}_j) \neq \mathbf{0}, & T^{i-1}(\mathbf{v}_j) \neq \mathbf{0}, & T^i(\mathbf{v}_j) = \mathbf{0} \\ T(\mathbf{v}_j) \neq \mathbf{0}, & \dots & T^{i-2}(T(\mathbf{v}_j)) \neq \mathbf{0}, & T^{i-1}(T(\mathbf{v}_j)) = \mathbf{0} \end{array}$$

Poiché $T^{i-2}(T(\mathbf{v}_j)) \neq \mathbf{0}$ per ogni j , mentre $T^{i-2}(\mathbf{w}) = \mathbf{0}$ per ogni $\mathbf{w} \in \text{Ker}(T^{i-2})$, la condizione $\text{Ker}(T^{i-2}) \cap \text{span}(T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_m)) = \{\mathbf{0}\}$ è soddisfatta. I vettori \mathbf{v}_j sono linearmente indipendenti, quindi:

$$a_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + a_m \mathbf{v}_m = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \cdots = a_m = 0$$

Per i vettori $T(\mathbf{v}_j)$ si ha:

$$a_1 T(\mathbf{v}_1) + \cdots + a_m T(\mathbf{v}_m) = T(a_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + a_m \mathbf{v}_m) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \cdots = a_m = 0$$

in quanto $\mathbf{v}_j \neq \mathbf{0}$ e $T(\mathbf{v}_j) \neq \mathbf{0}$ per ogni j , quindi sono anch'essi linearmente indipendenti e il loro insieme linearmente indipendente modulo $\text{Ker}(T^{i-2})$. \square

Il lemma suggerisce di costruire una base di Jordan muovendo da $\text{Ker}(T^k) \setminus \text{Ker}(T^{k-1})$, dove k è l'indice di nilpotenza. Individuata infatti una base di $\text{Ker}(T^k)$ modulo $\text{Ker}(T^{k-1})$, $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$, le immagini degli m elementi della base, $T(\mathbf{v}_i)$, appartengono a $\text{Ker}(T^{k-1})$ e sono linearmente indipendenti modulo $\text{Ker}(T^{k-2})$. Ne segue che $\text{Ker}(T^{k-1}) \setminus \text{Ker}(T^{k-2})$ ha dimensione almeno m e che, dopo aver eventualmente completato l'insieme $\{T(\mathbf{v}_i) : i = 1, \dots, m\}$ fino a formare una base di $\text{Ker}(T^{k-1}) \setminus \text{Ker}(T^{k-2})$, si può ripetere il procedimento fino a $\text{Ker}(T)$.

Può convenire indicare i vettori via via individuati con lettere in ordine alfabetico decrescente: con \mathbf{z} i vettori di una base di $\text{Ker}(T^k)$ modulo $\text{Ker}(T^{k-1})$, con \mathbf{y} i vettori di una base di $\text{Ker}(T^{k-1})$ modulo $\text{Ker}(T^{k-2})$, con \mathbf{x} i vettori di una base di $\text{Ker}(T^{k-2})$ modulo $\text{Ker}(T^{k-3})$ ecc. Ad esempio, se $k = 4$ possono aversi vettori e stringhe come nella Figura 1.

Si vede che vi sono stringhe di lunghezza decrescente, dall'alto verso il basso: 4, 3, 3, 2, 1 (e si può notare che la somma delle lunghezze delle stringhe è uguale alla dimensione di V). A ciascuna stringa di lunghezza j corrisponde un blocco di Jordan di ordine j . L'ordine della matrice di Jordan, coincidente con la dimensione di V , è pari alla somma delle lunghezze delle stringhe (degli ordini dei blocchi). Inoltre:

- la prima stringa dall'alto, che ha lunghezza massima, ha lunghezza pari all'indice di nilpotenza $k = 4$;
- il numero $p = 5$ delle stringhe, che è anche il numero dei blocchi di Jordan, è pari alla dimensione di $\text{Ker}(T)$, una cui base è $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_5\}$;

4. FORMA CANONICA DI OPERATORI NILPOTENTI

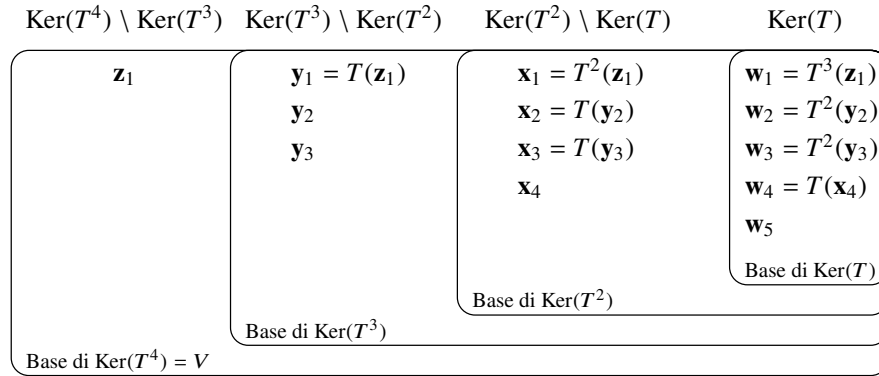


Figura 1. Una base di Jordan per un ipotetico spazio vettoriale su cui sia definito un operatore con indice di nilpotenza $k = 4$. I vettori su una stessa riga appartengono ciascuno a una stessa stringa, generata dal vettore più a sinistra. Le basi per le differenze $\text{Ker}(T^j) \setminus \text{Ker}(T^{j-1})$ sono formate dai vettori in colonna, mentre i riquadri racchiudono le basi per i sottospazi $\text{Ker}(T^j)$.

c) il numero delle stringhe di lunghezza j , $j \in \{1, \dots, k\}$, quindi il numero dei blocchi di ordine j , è uguale alla dimensione di $\text{Ker}(T^j) \setminus \text{Ker}(T^{j-1})$ meno la dimensione di $\text{Ker}(T^{j+1}) \setminus \text{Ker}(T^j)$, ad esempio:

– vi è una sola stringa di lunghezza 4, in quanto (ricordando che $\text{Ker}(T^{k+1}) = \text{Ker}(T^k)$):

$$\dim_{\mathbb{K}}[\text{Ker}(T^4) \setminus \text{Ker}(T^3)] - \dim_{\mathbb{K}}[\text{Ker}(T^5) \setminus \text{Ker}(T^4)] = 1 - 0 = 1$$

che si può anche scrivere:

$$\begin{aligned} & (\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(T^4) - \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(T^3)) - (\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(T^5) - \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(T^4)) \\ &= (13 - 12) - (13 - 13) = 13 - 12 = 1 \end{aligned}$$

– vi sono due stringhe di lunghezza 3, in quanto:

$$\dim_{\mathbb{K}}[\text{Ker}(T^3) \setminus \text{Ker}(T^2)] - \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(T^4) \setminus \text{Ker}(T^3) = 3 - 1 = 2$$

ovvero:

$$\begin{aligned} & (\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(T^3) - \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(T^2)) - (\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(T^4) - \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(T^3)) \\ &= (12 - 9) - (13 - 12) = 3 - 1 = 2 \end{aligned}$$

Il teorema che segue dimostra in modo più generale quanto appena illustrato.

Teorema 4.14 (Forma canonica di operatori nilpotenti). *Sia $T : V \rightarrow V$ un operatore nilpotente con indice di nilpotenza $k \geq 1$.*

1) *Se $\{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m\}$ è una qualsiasi base di $V = \text{Ker}(T^k)$ modulo $\text{Ker}(T^{k-1})$, esiste una base di Jordan le cui stringhe di lunghezza k sono quelle generate dai vettori \mathbf{z}_i .*

2) *Se \mathcal{J} è una base di Jordan e nella matrice \mathbf{J} associata a T rispetto ad essa i blocchi di Jordan lungo la diagonale sono disposti per ordine decrescente, allora il numero p e gli ordini j_1, \dots, j_p dei blocchi sono univocamente determinati da T e risulta:*

$$p = \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(T), \quad j_1 = k \tag{7}$$

4. FORMA CANONICA DI OPERATORI NILPOTENTI

Inoltre, per ogni $j \in \{1, \dots, k\}$, il numero (eventualmente nullo) dei blocchi di Jordan di ordine j è dato da:

$$d_j - d_{j+1}, \quad d_j = \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(T^j) - \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(T^{j-1}) \quad (8)$$

Dimostrazione. Se $k = 1$ allora T è l'operatore nullo, $\text{Ker}(T^0) = \text{Ker}(Id) = \{\mathbf{0}\}$, i vettori della base canonica \mathbf{e}_i sono linearmente indipendenti modulo $\text{Ker}(T^0)$ e generano stringhe di lunghezza uno $S_T(\mathbf{e}_i) = \{\mathbf{e}_i\}$, la matrice di Jordan è la matrice nulla, il numero dei blocchi di Jordan, uguale al numero degli zeri lungo la diagonale principale, è pari alla dimensione di $\text{Ker}(T) = V$ e il loro ordine è 1.

Se $k > 1$, ponendo $K_i = \text{Ker}(T^i)$, ciascun K_i è T -invariante, in quanto se $\mathbf{v} \in K_i$ si ha $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ e anche $T(T(\mathbf{v})) = \mathbf{0}$, le inclusioni $\text{Ker}(T^{i-1}) \subsetneq \text{Ker}(T^i)$ sono strette e quindi $\dim_{\mathbb{K}} K_{i-1} < \dim_{\mathbb{K}} K_i$ per ogni $i \leq k$ (v. dimostrazione del Lemma 4.4).

1) Si può procedere per induzione su $n = \dim_{\mathbb{K}} V$. Se $n = 1$, allora T non è altro che una moltiplicazione per zero e si torna al caso $k = 1$. Si può quindi supporre $n > 1$, $k > 1$ e l'asserto vero per spazi di dimensione minore di n . Fissata una base $\{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m\}$ di V modulo K_{k-1} , per il Lemma 4.13 i vettori $T(\mathbf{z}_1), \dots, T(\mathbf{z}_m)$ appartengono a K_{k-1} e sono linearmente indipendenti modulo K_{k-2} . Si può quindi costruire una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_d\}$, di K_{i-1} modulo K_{k-2} , con $d = \dim K_{k-1} - \dim K_{k-2} = d_{k-1} \geq m$ e $\mathbf{y}_i = T(\mathbf{z}_i)$ per $i \leq m$. Per l'ipotesi induttiva applicata alla restrizione di T a K_{k-1} , $T_1 = T|_{K_{k-1}}$, esiste una base di Jordan \mathcal{J}' per K_{k-1} le cui stringhe di lunghezza $k-1$ sono generate dai vettori \mathbf{y}_i . Quindi \mathcal{J}' è della forma:

$$\mathcal{J}' = S_{T_1}(\mathbf{y}_1) \cup \dots \cup S_{T_1}(\mathbf{y}_d) \cup S_{T_1}(\mathbf{y}_{d+1}) \cup \dots \cup S_{T_1}(\mathbf{y}_l)$$

dove $l \leq \dim_{\mathbb{K}} K_{k-1}$ e i vettori \mathbf{y}_i per $i > d$ hanno indice minore di $k-1$. L'unione:

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}' \cup \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m\}$$

è una base di V perché per ipotesi $V = K_{k-1} \oplus \text{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ ed è una base di Jordan perché è un'unione di stringhe:

$$\mathcal{J} = S_T(\mathbf{z}_1) \cup \dots \cup S_T(\mathbf{z}_m) \cup \dots \cup S_T(\mathbf{y}_d) \cup S_T(\mathbf{y}_{d+1}) \cup \dots \cup S_T(\mathbf{y}_l)$$

in cui, ovviamente, le uniche stringhe di lunghezza k sono le prime m .

2) Per dimostrare che $j_1 = k$, poiché $T^k = \mathbf{0}$ e $T^{k-1} \neq \mathbf{0}$, basta mostrare che $T^{j_1} = \mathbf{0}$ e $T^{j_1-1} \neq \mathbf{0}$. Sia \mathcal{J} la base di Jordan per V :

$$\mathcal{J} = S_T(\mathbf{v}_1) \cup \dots \cup S_T(\mathbf{v}_p), \quad i(\mathbf{v}_i) = j_i, \quad j_1 \geq \dots \geq j_p$$

Il generico vettore della i -esima stringa è $T^j(\mathbf{v}_i)$ con $j = 0, \dots, j_i - 1$ e si ha $T^{j_i}(\mathbf{v}_i) = \mathbf{0}$. Ne segue che T^{j_i} annulla tutti i vettori della i -esima stringa e che, essendo $j_1 \geq j_i$ per ogni i , T^{j_1} annulla tutti i vettori in \mathcal{J} , ovvero che $T^{j_1} = \mathbf{0}$. Peraltro, poiché $i(\mathbf{v}_1) = j_1$, si ha $T^{j_1-1}(\mathbf{v}_1) \neq \mathbf{0}$, ovvero $T^{j_1-1} \neq \mathbf{0}$.

Il numero p dei blocchi è uguale alla dimensione di $\text{Ker}(T)$, in quanto il rango di \mathbf{J} è la somma dei ranghi dei singoli blocchi di Jordan, che è $\sum_{i=1}^p (j_i - 1) = n - p$, quindi $p = \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(T)$ per il Teorema della nullità e del rango.

Sia infine, per ogni $j \in \{1, \dots, k\}$, n_j il numero di blocchi di ordine j . Poiché a ogni blocco corrisponde una stringa (Lemma 4.9), n_j è pari al numero delle stringhe $S_T(\mathbf{v}_i)$

aventi lunghezza j , ovvero è il numero di vettori \mathbf{v}_i tali che $i(\mathbf{v}_i) = j$. Per $j = k$, il numero n_k dei blocchi di ordine k è:

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(T^k) - \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(T^{k-1}) = \dim_{\mathbb{K}} V - \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(T^{k-1})$$

che, essendo $\text{Ker}(T^{k+1}) = \text{Ker}(T^k)$, può anche essere scritto nella forma:

$$\begin{aligned} d_k - d_{k+1} &= \dim \text{Ker}(T^k) - \dim \text{Ker}(T^{k-1}) - \dim \text{Ker}(T^{k+1}) + \dim \text{Ker}(T^k) \\ &= \dim \text{Ker}(T^k) - \dim \text{Ker}(T^{k-1}) \end{aligned}$$

Per dimostrarlo si può osservare che, se vi sono n_k vettori che generano stringhe di lunghezza k ,

$$V = \text{span}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_k}) \oplus \text{Ker}(T^{k-1}) \quad (9)$$

Infatti, i vettori in $\mathcal{J} \setminus \text{span}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_k})$ appartengono a $\text{Ker}(T^{k-1})$, non a $\text{Ker}(T^k) = V$, in quanto generano tutti stringhe di lunghezza minore di k , quindi $V = \text{span}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_k}) + \text{Ker}(T^{k-1})$. Inoltre, se vi fosse un vettore \mathbf{v} appartenente sia a $\text{span}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_k})$ che a $\text{Ker}(T^{k-1})$, sarebbe nullo. Si avrebbe infatti $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n_k} a_i \mathbf{z}_i$, ma anche $T^{k-1}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, ovvero $\sum_{i=1}^{n_k} a_i T^{k-1}(\mathbf{z}_i) = \mathbf{0}$. Poiché però i vettori $T^{k-1}(\mathbf{z}_i)$ fanno parte della base, non può che risultare $a_i = \dots = a_{n_k} = 0$ e $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Ciò conferma la (9), da cui segue $n_k = d_k - d_{k+1}$. Considerando ora il sottospazio $\text{Ker}(T^{k-1})$, questo è generato dai vettori in $\mathcal{J}' = \mathcal{J} \setminus \text{span}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_k})$ e può essere scomposto come appena visto nella somma diretta $\text{span}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m) \oplus \text{Ker}(T^{k-2})$, con la differenza che n_k dei vettori \mathbf{y}_i appartengono alle stringhe di lunghezza k generate dai vettori $(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_k})$: $\mathbf{y}_i = T(\mathbf{z}_i)$ per $i \in \{1, \dots, n_k\}$. Ne segue che, poiché i vettori in $\mathcal{J}' \setminus \text{span}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m)$ generano stringhe di lunghezza inferiore a $k - 1$, le stringhe di lunghezza $k - 1$ generate dai vettori \mathbf{y}_i sono $\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(T^{k-1}) - \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(T^{k-2})$ meno quelle generate dai vettori \mathbf{z}_i , che sono $\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(T^k) - \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(T^{k-1})$. Ciò vale evidentemente per qualsiasi $j < k$. Infine, il numero delle stringhe di lunghezza 1 generate dai vettori in \mathcal{J} che generano $\text{Ker}(T)$ è chiaramente:

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(T) - (\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(T^2) - \dim_{b_K} \text{Ker}(T))$$

in quanto è uguale al numero di vettori che non appartengano a stringhe generate da vettori in $\text{Ker}(T^j)$ con $j > 1$. In generale, quindi, tenendo presente che $\text{Ker}(T^{k+1}) = \text{Ker}(T^k)$ e $\text{Ker}(T^0) = \text{Ker}(Id) = \{\mathbf{0}\}$, il numero di stringhe di lunghezza j (il numero dei blocchi di Jordan di ordine j) è dato da:

$$d_j - d_{j+1} = \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(T^j) - \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(T^{j-1}) - \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(T^{j+1}) + \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(T^j) \quad \square$$

Definizione 4.15. Si dice *forma canonica di Jordan* di un operatore nilpotente $T : V \rightarrow V$ la matrice \mathbf{J} associata a T rispetto a una *qualsiasi* base di Jordan \mathcal{J} , ordinata in modo che le dimensioni j_1, \dots, j_p dei p blocchi di Jordan lungo la diagonale principale abbiano ordine decrescente. La p -pla ordinata di interi j_1, \dots, j_p viene detta *invariante fondamentale* di T .

Facendo riferimento alla Figura 1, l'invariante fondamentale è costituito dalle lunghezze delle stringhe in ordine decrescente: (4, 3, 3, 2, 1).

Osservazione 4.16. Il Teorema 4.14 afferma che, se si sceglie di disporre i blocchi di Jordan per ordine decrescente da sinistra verso destra, per un dato operatore T esiste un'unica forma di Jordan, in quanto la struttura di questa è univocamente determinata dalla successione dei nuclei di potenze successive di T . Ciò non esclude che vi possano essere:

- a) più forme di Jordan per uno stesso operatore, differenti tra loro per l'ordinamento dei blocchi;
- b) più basi rispetto alle quali la matrice associata a T sia la stessa forma di Jordan, anche tenendo fermo l'ordinamento dei blocchi di questa.

La prima possibilità è evidente. Quanto alla seconda, così come uno spazio vettoriale ammette infinite basi, sono infinite le scelte possibili dei vettori che compongono le basi di $\text{Ker}(T^j)$ modulo $\text{Ker}(T^{j-1})$, le cui stringhe vanno poi a formare una base di Jordan. Non dipendendo la forma di Jordan da tali scelte, si ottiene comunque che essa è associata a T rispetto a una qualunque delle basi così trovate (v. Esempio 4.19). Si può aggiungere che ciascun elemento di una base può essere sostituito da un suo multiplo; pertanto, se \mathbf{Q} ha per colonne i vettori di una base e si ha $\mathbf{QJQ}^{-1} = \mathbf{T}$, nulla cambia se si sostituisce \mathbf{Q} con $\mathbf{P} = a\mathbf{Q}$, $a \in \mathbb{K}$:

$$\mathbf{PJP}^{-1} = a\mathbf{QJa}^{-1}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{QJQ}^{-1} = \mathbf{T}$$

Si può quindi dire che un'unica matrice di Jordan può essere associata a un operatore T rispetto a infinite basi.

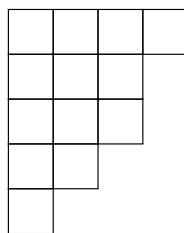
4.1 Diagrammi di Young

Il Teorema 4.14 offre criteri per costruire matrici e basi di Jordan. Risultano utili allo scopo i cosiddetti diagrammi di Young, che hanno una struttura simile a quella della Figura 1, letta però da destra a sinistra. Lo schema della Figura 1 mostra il procedimento di individuazione delle stringhe che vanno poi a formare una base di Jordan: si inizia con $\text{Ker}(T^k) \setminus \text{Ker}(T^{k-1})$, a sinistra, si termina con $\text{Ker}(T)$. In questo modo, però, ciascuna stringa viene scritta in ordine inverso (cfr. Definizione 4.5). Un diagramma di Young va compilato partendo da destra, ma ne risultano poi stringhe ben ordinate.

Definizione 4.17. Si dice *diagramma di Young* una collezione finita di celle, allineate sulla sinistra in modo tale che il numero di celle per riga sia decrescente.

Dati un operatore nilpotente $T : V \rightarrow V$, con indice di nilpotenza k , si compila un diagramma di Young seguendo le seguenti regole, che sono accompagnate da esempi coerenti con la Figura 1:

- 1) si prevedono p righe, dove p è la dimensione di $\text{Ker}(T)$, e j_i celle per ogni riga da $i = 1$ a p ; ad esempio, se l'invariante fondamentale è $(4, 3, 3, 2, 1)$, il diagramma di Young è:



4. FORMA CANONICA DI OPERATORI NILPOTENTI

2) si scrivono nell'ultima colonna i vettori di una base di $V = \text{Ker}(T^k)$ modulo $\text{Ker}(T^{k-1})$:

			\mathbf{z}_1

3) si scrivono nella penultima colonna prima le immagini per T dei vettori dell'ultima colonna, $\mathbf{y}_1 = T(\mathbf{z}_1)$, poi, se rimangono celle vuote, altri vettori tali da completare una base per $\text{Ker}(T^{k-1})$ modulo $\text{Ker}(T^{k-2})$:

		\mathbf{y}_1	\mathbf{z}_1
		\mathbf{y}_2	
		\mathbf{y}_3	

4) si ripete il procedimento fino a riempire tutte le colonne:

\mathbf{w}_1	\mathbf{x}_1	\mathbf{y}_1	\mathbf{z}_1
\mathbf{w}_2	\mathbf{x}_2	\mathbf{y}_2	
\mathbf{w}_3	\mathbf{x}_3	\mathbf{y}_3	
\mathbf{w}_4	\mathbf{x}_4		
\mathbf{w}_5			

5) si compila la matrice \mathbf{J} iniziando con un blocco $\mathbf{J}_{j_1}(0)$ (j_1 è il primo elemento dell'invariante fondamentale), poi con blocchi di ordine decrescente:

$$\text{diag} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, [0] \right)$$

6) si compila la matrice \mathbf{Q} , le cui colonne sono i vettori di una base di Jordan, prendendo le stringhe contenute nel diagramma di Young dall'alto verso il basso:

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{x}_1 \quad \mathbf{y}_1 \quad \mathbf{z}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{y}_2 \quad \mathbf{w}_3 \quad \mathbf{x}_3 \quad \mathbf{y}_3 \quad \mathbf{w}_4 \quad \mathbf{x}_4 \quad \mathbf{w}_5]$$

Se si usano lettere in ordine alfabetico decrescente per i vettori delle basi delle differenze $\text{Ker}(T^j) \setminus \text{Ker}(T^{j-1})$, le colonne in \mathbf{Q} sono ordinate prima per pedice e poi, per uno stesso pedice, per i nomi dei vettori.

Esempio 4.18. Sia $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'operatore:

$$T \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

4. FORMA CANONICA DI OPERATORI NILPOTENTI

Si vede subito che il rango della matrice associata è 1, quindi $p = \dim \text{Ker}(T) = 3$ e il diagramma di Young deve avere 3 righe. Si verifica poi facilmente che $\mathbf{T}^2 = \mathbf{O}$, cioè che T è nilpotente con indice di nilpotenza $k = 2$; poiché k è la lunghezza massima delle stringhe (l'ordine massimo dei blocchi di Jordan), il diagramma di Young deve avere due colonne. Possibili basi dei nuclei delle potenze di \mathbf{T} sono:

$$\text{Ker}(T) : \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{Ker}(T^2) : \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(la seconda base è 'evidente' in quanto $\text{Ker}(T^2) = \mathbb{R}^4$). La successione delle differenze è breve:

$$\text{Ker}(T^2) \setminus \text{Ker}(T) \quad \text{Ker}(T)$$

e si vede che può esservi una sola stringa di lunghezza 2, in quanto vi è un solo vettore in $\text{Ker}(T^2) \setminus \text{Ker}(T)$, che fornisce due elementi della base di Jordan. I restanti due elementi non possono che appartenere a $\text{Ker}(T)$, generando stringhe di lunghezza 1. Il diagramma di Young assume quindi la forma:

\mathbf{y}_1	\mathbf{z}_1
\mathbf{y}_2	
\mathbf{y}_3	

Quanto ai singoli vettori:

- a) \mathbf{z}_1 deve essere un vettore non appartenente a $\text{Ker}(T)$, quale $(1, 0, 0, 0)$;
- b) \mathbf{y}_1 sarà $T(\mathbf{z}_1) = (2, 1, 0, 1)$;
- c) \mathbf{y}_2 deve appartenere a $\text{Ker}(T)$ ed essere linearmente indipendente dai precedenti, ad esempio $(0, 0, 0, 1)$;
- d) \mathbf{y}_3 deve completare la base e può essere $(-2, 0, 1, 0)$.

La forma canonica di T si ricava dalla struttura del diagramma di Young, la matrice \mathbf{Q} contiene i vettori appena individuati nell'ordine $\mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e si può verificare che $\mathbf{Q}\mathbf{J}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{T}$, quindi la matrice \mathbf{J} rappresenta l'operatore T rispetto alla base i cui elementi sono le colonne di \mathbf{Q} . ||

Esempio 4.19. Dato lo stesso operatore dell'esercizio precedente, si potrebbe scegliere un'altra base per $\text{Ker}(T)$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

La struttura del diagramma di Young e quindi la matrice di Jordan resterebbero invariate, ma si perverrebbe a una diversa base di Jordan. Procedendo come nell'esercizio precedente:

4. FORMA CANONICA DI OPERATORI NILPOTENTI

- a) $\mathbf{z}_1 = (1, 0, 0, 0)$;
 b) $\mathbf{y}_1 = T(\mathbf{z}_1) = (2, 1, 0, 1)$;
 c) \mathbf{y}_2 , dovendo comunque appartenere a $\text{Ker}(T)$ ed essere linearmente indipendente dai precedenti, può essere $(0, 1, 1, 0)$;
 d) $\mathbf{y}_3 = (0, 0, 0, 1)$ può completare la base.

La matrice di Jordan è uguale a quella dell'esercizio precedente, ma la matrice \mathbf{Q} cambia:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ciò nonostante, si ha ancora $\mathbf{Q}\mathbf{J}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{T}$. ||

Esempio 4.20. Sia $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ l'operatore nilpotente, con indice di nilpotenza $k = 3$,

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2x_1 \\ x_1 + 3x_2 \\ 4x_5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Possibili basi dei nuclei delle potenze di T sono:

$$\text{Ker}(T) : \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \text{Ker}(T^2) : \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \text{Ker}(T^3) = \mathbb{R}^5 : \mathcal{E}$$

dove \mathcal{E} indica la base canonica di \mathbb{R}^5 . Si vede che le differenze delle dimensioni sono:

- $\dim \text{Ker}(T^3) - \dim \text{Ker}(T^2) = 1$;
- $\dim \text{Ker}(T^2) - \dim \text{Ker}(T) = 2$;
- $\dim \text{Ker}(T) = 2$.

Vi sono quindi 1 stringa di lunghezza $k = 3$, poi $2 - 1 = 1$ stringa di lunghezza 2, infine $2 - 2 = 0$ stringhe di lunghezza 1. Il diagramma di Young è:

\mathbf{x}_1	\mathbf{y}_1	\mathbf{z}_1
\mathbf{x}_2	\mathbf{y}_2	

da cui segue subito che la forma canonica di Jordan di T è:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Per trovare la matrice \mathbf{Q} :

- a) \mathbf{z}_1 può essere $(1, 0, 0, 0, 0)$;
- b) $\mathbf{y}_1 \in T(\mathbf{z}_1) = (0, 2, 1, 0, 0)$;
- c) $\mathbf{x}_1 \in T(\mathbf{y}_1) = (0, 0, 6, 0, 0)$;
- d) \mathbf{y}_2 deve appartenere a $\text{Ker}(T^2)$ ma non a $\text{Ker}(T)$ e deve essere indipendente dai precedenti, ad esempio $(0, 0, 0, 0, 1)$;
- e) $\mathbf{x}_2 \in T(\mathbf{y}_2) = (0, 0, 0, 4, 0)$.

La matrice può quindi essere:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e si verifica che $\mathbf{Q}\mathbf{J}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{T}$.

||

4.2 Forma alternativa

Si è rilevato che alcuni autori definiscono i blocchi di Jordan in modo diverso, intendendo che la diagonale contenente tutti 1 sia quella sotto, non sopra, la diagonale principale. Ne risulta che si ottengono matrici di Jordan che sono le trasposte di quelle fin qui illustrate.

Nel caso di operatori nilpotenti, per conformarsi alla definizione alternativa è sufficiente ordinare le stringhe in senso inverso, è cioè sufficiente adottare l'ordine usato nella Figura 1.

Esempio 4.21. Nell'Esercizio 4.20 si era pervenuti al diagramma di Young:

\mathbf{x}_1	\mathbf{y}_1	\mathbf{z}_1
\mathbf{x}_2	\mathbf{y}_2	

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 = (0, 0, 6, 0, 0) \\ \mathbf{y}_1 = (0, 2, 1, 0, 0) \\ \mathbf{z}_1 = (1, 0, 0, 0, 0) \\ \mathbf{x}_2 = (0, 0, 0, 4, 0) \\ \mathbf{y}_2 = (0, 0, 0, 0, 1) \end{cases}$$

Seguendo l'ordine dei pedici, ma poi quello alfabetico inverso dei nomi dei vettori, si possono costruire le matrici:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}^{-1}\mathbf{TP} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si vede che la matrice \mathbf{T} è simile a una matrice che è la trasposta della matrice \mathbf{J} trovata nell'Esercizio 4.20, mediante una matrice \mathbf{P} in cui le colonne della matrice \mathbf{Q} relative a ciascuno dei due blocchi sono in ordine inverso.

||

5 Forma canonica di Jordan nel caso generale

In generale un operatore lineare ha p autovalori, mentre un operatore nilpotente ha il solo autovalore nullo. La forma canonica di un operatore nilpotente può contenere uno o più blocchi di Jordan di ordine decrescente; l'ordine del primo blocco è uguale all'indice di nilpotenza, a sua volta uguale all'indice dell'autovalore nullo. La forma canonica nel caso generale contiene tante sottomatrici (a volte dette *segmenti di Jordan*) quanti sono gli autovalori, ciascuna delle quali ha struttura simile alla forma di Jordan di un operatore nilpotente, ma l'autovalore ripetuto lungo la sua diagonale principale può essere diverso da zero.

Teorema 5.1. *Sia $T : V \rightarrow V$ un operatore con polinomio minimo completamente riducibile su \mathbb{K} . Siano λ_j , $j \in \{1, \dots, p\}$, i suoi distinti autovalori e siano s_j , m_j e γ_j rispettivamente l'indice, la molteplicità algebrica e la molteplicità geometrica dell'autovalore λ_j . Esiste una base di Jordan \mathcal{J} per T tale che la matrice associata a T rispetto a \mathcal{J} è una matrice \mathbf{J} , detta forma canonica di Jordan di T , in cui per ciascuno degli autovalori λ_j , ordinati per s_j decrescenti, vi sono γ_j blocchi di Jordan, il primo di ordine s_j e gli eventuali altri di ordine decrescente, e la somma degli ordini dei blocchi è uguale a m_j :*

$$\mathbf{J} = \text{diag}(\mathbf{J}_{k(1,1)}(\lambda_1), \dots, \mathbf{J}_{k(1,\gamma_1)}(\lambda_1), \dots, \mathbf{J}_{k(p,1)}(\lambda_p), \dots, \mathbf{J}_{k(p,\gamma_p)}(\lambda_p)) \quad (10)$$

dove $k(j,i)$ è l'ordine dell' i -esimo blocco di Jordan, $i \in \{1, \dots, \gamma_j\}$, per l'autovalore λ_j e si intende $k(j,1) = s_j \geq k(j,2) \geq \dots \geq k(j,\gamma_j)$, $k(j,1) + \dots + k(j,\gamma_j) = m_j$.

Dimostrazione. Se il polinomio minimo è completamente riducibile, V ammette la scomposizione spettrale:

$$V = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$$

dove $E_j = \text{Ker}((T - \lambda_j Id)^{s_j})$ è l'autospazio generalizzato di λ_j , un sottospazio di V invariante per T e per $T_j = T - \lambda_j Id$, di dimensione m_j (Teorema 3.18). Per ciascun j , l'operatore T_j è nilpotente con indice di nilpotenza s_j e $\text{Ker}(T_j)$ è l'autospazio relativo a λ_j ; pertanto, la forma canonica di Jordan di $T_j|_{E_j}$ è del tipo:

$$\mathbf{A}_j = \text{diag}(\mathbf{J}_{k(j,1)}(0), \dots, \mathbf{J}_{k(j,\gamma_j)}(0))$$

con $k(j,1) = s_j \geq k(j,2) \geq \dots \geq k(j,\gamma_j)$ e $k(j,1) + \dots + k(j,\gamma_j) = m_j$ rispetto a una base di Jordan \mathcal{J}_j per E_j (Teorema 4.14). Poiché $T|_{E_j} = T_j|_{E_j} + \lambda_j Id$, la matrice associata a $T|_{E_j}$ è $\mathbf{J}_j = \mathbf{A}_j + \lambda_j \mathbf{I}_{m_j}$:

$$\mathbf{J}_j = \text{diag}(\mathbf{J}_{k(j,1)}(\lambda_j), \dots, \mathbf{J}_{k(j,\gamma_j)}(\lambda_j))$$

A T può quindi essere associata la matrice diagonale a blocchi (10) rispetto alla base $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \cup \dots \cup \mathcal{J}_p$ (Teorema 3.8). \square

Osservazione 5.2. Rimane ovviamente vero, anche nel caso generale, quanto detto nell'Osservazione 4.16: la forma canonica di Jordan di un operatore è unica a meno di un diverso ordinamento degli autovalori e/o, per ciascuno di essi, dei blocchi di Jordan; una stessa forma di Jordan può essere associata a un operatore rispetto a infinite basi.

Il polinomio minimo di un operatore nilpotente è semplicemente x^k , dove k è l'indice di nilpotenza. Nel caso generale, per il Teorema 3.18 il polinomio minimo è il prodotto di fattori $(x - \lambda_j)^{k_j}$ in cui ciascun k_j non è altro che l'indice s_j di λ_j , che a sua volta è l'ordine del blocco più grande nella sottomatrice che ha λ_j sulla diagonale principale. L'algoritmo per il calcolo della forma di Jordan di un operatore, quindi, include il calcolo del polinomio minimo.

Esempio 5.3. Sia $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ l'operatore:

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \\ 2x_4 + 4x_5 \\ 2x_5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico è $p_T = (x - 1)^3(x - 2)^2$ e indica che vi sono due autovalori, $\lambda_1 = 1$ con molteplicità algebrica $m_1 = 3$ e $\lambda_2 = 2$ con $m_2 = 2$. Il numero dei blocchi di Jordan per λ_j è uguale alla sua molteplicità geometrica γ_j , alla dimensione del nucleo di $T - \lambda_j Id$. Vi è solo un blocco per ciascun autovalore, in quanto possibili basi per i due nuclei sono:

$$\text{Ker}(T - Id) : \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{Ker}(T - 2Id) : \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

In generale, la somma degli ordini dei blocchi è uguale alla molteplicità algebrica m_j e l'ordine del blocco più grande è uguale all'indice s_j dell'autovalore. In questo caso, $s_j = m_j$ per entrambi. La forma di Jordan e il polinomio minimo (uguale in questo caso al polinomio caratteristico) sono:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \mu_T = (x - 1)^3(x - 2)^2$$

È molto semplice la struttura dei diagrammi di Young per i due autovalori, che sono rispettivamente:

$$\boxed{\mathbf{x}_{11}} \boxed{\mathbf{y}_{11}} \boxed{\mathbf{z}_{11}} \quad \boxed{\mathbf{y}_{21}} \boxed{\mathbf{z}_{21}}$$

In entrambi i casi, è sufficiente trovare un vettore \mathbf{z}_{j1} che appartenga a $\text{Ker}((T - \lambda_j Id)^{s_j})$ ma non a $\text{Ker}((T - \lambda_j Id)^{s_j-1})$. Per $\lambda_1 = 1$, possibili basi sono:

$$\text{Ker}((T - Id)^3) : \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{Ker}((T - Id)^2) : \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

5. FORMA CANONICA DI JORDAN NEL CASO GENERALE

Si può scegliere $\mathbf{z}_{11} = (1, 0, 0, 0, 0)$. Gli altri vettori seguono da successive moltiplicazioni per $T - Id$, quindi la stringa $\{\mathbf{x}_{11} = (T - Id)(\mathbf{y}_{11}), \mathbf{y}_{11} = (T - Id)(\mathbf{z}_{11}), \mathbf{z}_{11}\}$ è:

$$\{ (0, 0, 6, 0, 0), (0, 2, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 0) \}$$

Per $\lambda_2 = 2$:

$$\text{Ker}((T - 2Id)^2) : \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{Ker}(T - 2Id) : \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

si ottiene la stringa $\mathbf{y}_{21} = (T - 2Id)(\mathbf{z}_{21}), \mathbf{z}_{21}$:

$$\{ (0, 0, 0, 4, 0), (0, 0, 0, 0, 1) \}$$

Mettendo in colonna i vettori così trovati si ottiene la matrice \mathbf{Q} :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e si verifica che $\mathbf{Q}\mathbf{J}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{T}$.

||

Esempio 5.4. Sia $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ l'operatore:

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_1 + 3x_2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \\ x_4 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico è $p_T = (x - 2)^3(x - 1)^2$ e indica che gli autovalori sono $\lambda_1 = 2$ con molteplicità algebrica $m_1 = 3$ e $\lambda_2 = 1$ con $m_2 = 2$. Gli indici degli autovalori sono gli esponenti per i quali $\text{Ker}((T - \lambda_j Id)^{s_j}) = \text{Ker}((T - \lambda_j Id)^{s_j+1})$, mentre il numero dei blocchi per ciascun autovalore è uguale alla sua molteplicità geometrica, alla dimensione del relativo autospazio. Possibili basi per gli autospazi sono:

$$\text{Ker}(T - 2Id) : \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \text{Ker}(T - Id) : \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Vi devono quindi essere due blocchi per l'autovalore 2 e uno per l'autovalore 1. Inoltre, la somma degli ordini dei blocchi per l'autovalore 2 deve essere $m_1 = 3$, con l'unica possibilità $2 + 1$, mentre l'ordine dell'unico blocco per l'autovalore 1 non può che essere $m_2 = 2$.

5. FORMA CANONICA DI JORDAN NEL CASO GENERALE

Ne segue che $s_1 = s_2 = 2$. La successione delle potenze dei nuclei lo conferma, infatti per l'autovalore 2 possibili basi sono:

$$\text{Ker}((T - 2Id)^2) : \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \text{Ker}((T - 2Id)^3) : \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

quindi $s_1 = 2$. Analogamente per l'autovalore 1:

$$\text{Ker}((T - Id)^2) : \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \text{Ker}((T - Id)^3) : \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Pertanto, la forma canonica di Jordan e il polinomio minimo sono:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mu_T = (x - 2)^2(x - 1)^2$$

I diagrammi di Young per i due autovalori sono, rispettivamente:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{y}_{11} & \mathbf{z}_{11} \\ \hline \mathbf{y}_{12} & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{y}_{21} & \mathbf{z}_{21} \\ \hline \end{array}$$

Quanto ai singoli vettori:

- a) \mathbf{z}_{11} deve appartenere a $\text{Ker}((T - 2Id)^2)$ ma non a $\text{Ker}(T - 2Id)$ e può essere $(1, 0, 0, 0, 0)$;
- b) \mathbf{y}_{11} è $(T - 2Id)(\mathbf{z}_{11}) = (-1, -1, 1, 0, -1)$;
- c) \mathbf{y}_{12} , dovendo appartenere a $\text{Ker}(T - 2Id)$ ed essere indipendente dai precedenti, può essere $(1, 1, 0, 0, 0)$;
- d) \mathbf{z}_{21} deve appartenere a $\text{Ker}(T - Id)^2$ ma non a $\text{Ker}(T - Id)$ e può essere $(0, 0, 0, 1, 0)$;
- e) $\mathbf{y}_{21} = (T - Id)(\mathbf{z}_{21}) = (0, 0, 0, 0, 1)$

Si ottiene:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}\mathbf{J}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{T} \quad \parallel$$

5.1 Forma alternativa

Si possono ottenere agevolmente matrici di Jordan in cui ciascun blocco abbia tutti 1 nella diagonale sotto la diagonale principale. È sufficiente, per ciascun autovalore, adottare lo stesso accorgimento già visto per gli operatori nilpotenti (§4.2).

Esempio 5.5. Nell'Esercizio 5.4 si erano costruiti i seguenti diagrammi di Young per i due autovalori:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{y}_{11} & \mathbf{z}_{11} \\ \hline \mathbf{y}_{12} & \\ \hline \end{array} \quad \begin{cases} \mathbf{y}_{11} = (-1, -1, 1, 0, -1) \\ \mathbf{z}_{11} = (1, 0, 0, 0, 0) \\ \mathbf{y}_{12} = (1, 1, 0, 0, 0) \end{cases} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{y}_{21} & \mathbf{z}_{21} \\ \hline \end{array} \quad \begin{cases} \mathbf{y}_{21} = (0, 0, 0, 0, 1) \\ \mathbf{z}_{21} = (0, 0, 0, 1, 0) \end{cases}$$

Seguendo l'ordine dei pedici, poi quello alfabetico inverso dei nomi dei vettori, si ottengono le matrici:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}^{-1}\mathbf{TP} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \parallel$$

5.2 Scomposizione diagonalizzabile-nilpotente

Una forma canonica di Jordan può essere vista come somma di una matrice diagonale, avente autovalori sulla diagonale principale, e di una matrice nilpotente in quanto triangolare superiore (o inferiore, secondo la definizione alternativa) con tutti zeri sulla diagonale principale. Ciò suggerisce la possibilità di scomporre qualsiasi operatore su uno spazio vettoriale complesso, oppure su uno spazio vettoriale reale ma con tutti gli autovalori reali, nella somma di un operatore diagonalizzabile e di un operatore nilpotente.

Teorema 5.6. *Se $T : V \rightarrow V$ è un operatore con polinomio minimo completamente riducibile su \mathbb{K} , può sempre essere scomposto in modo univoco nella somma:*

$$T = S + N, \quad SN = NS$$

dove S è un operatore diagonalizzabile e N è un operatore nilpotente.

Dimostrazione. Per il Teorema 3.18, V è scomponibile nella somma diretta di autospazi generalizzati, che sono suoi sottospazi invarianti, tanti quanti sono i k autovalori distinti dell'operatore T :

$$V = E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$$

dove $E_i = \text{Ker}((T - \lambda_i Id)^{s_i})$ e s_i è la molteplicità di λ_i come radice del polinomio minimo, e T è scomponibile nella somma diretta delle sue restrizioni a tali sottospazi:

$$T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_k$$

Ciascun $T_i : E_i \rightarrow E_i$ ha il solo autovalore λ_i . Si possono quindi definire, per ciascun T_i , i due operatori su E_i :

$$S_i = \lambda_i Id, \quad N_i = T_i - S_i$$

dove S_i è diagonalizzabile in quanto proporzionale all'identità, e N_i è nilpotente con indice di nilpotenza s_i in quanto $N_i^{s_i} = (T - \lambda_i Id)^{s_i}$, applicato a qualsiasi vettore di E_i , dà il vettore nullo. Inoltre S_i e N_i commutano, di nuovo perché S_i è proporzionale all'identità. Appare quindi possibile definire gli operatori:

$$S = S_1 \oplus \cdots \oplus S_k, \quad N = N_1 \oplus \cdots \oplus N_k \quad (11)$$

S è diagonalizzabile perché è diagonale in una base di V costituita dagli elementi delle basi degli autospazi generalizzati, mentre N è nilpotente di indice $q = \max\{s_1, \dots, s_k\}$ in quanto:

$$N^q = N_1^q \oplus \cdots \oplus N_k^q = 0$$

Inoltre, S e N commutano in quanto commutano S_i e N_i per ogni $i \in \{1, \dots, k\}$.

Le scomposizioni (11) sono ben definite se gli operatori S_i e N_i sono restrizioni di S e T ai rispettivi autospazi generalizzati. In tal caso le scomposizioni sono anche uniche, in quanto è unica la scomposizione di un operatore $T : V \rightarrow V$ in somma diretta di operatori ristretti a sottospazi invarianti di cui V sia somma diretta (v. Definizioni 2.1 e 3.7).

Per dimostrarlo, si può iniziare osservando che ciascun E_i è invariante sotto l'azione di qualsiasi operatore che commuti con T . Infatti, se $\mathbf{v} \in E_i$ e un operatore A commuta con T , si ha $(T - \lambda_i)^{s_i} A(\mathbf{v}) = A(T - \lambda_i)^{s_i}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, quindi $A(\mathbf{v}) \in E_i$. In particolare, poiché S e N commutano entrambi sia con S che con N , commutano con $T = S + N$, quindi ciascun E_i è invariante sia per S che per N . Ne segue che S e N possono essere scomposti in somme dirette di operatori ristretti ai sottospazi E_i .

Poiché S è diagonalizzabile per costruzione, sono diagonalizzabili anche $S|_{E_i}$ e la differenza $S|_{E_i} - S_i$. Poiché $T_i = T|_{E_i}$, si ha:

$$S|_{E_i} - S_i = (T|_{E_i} - N|_{E_i}) - (T_i - N_i) = N_i - N|_{E_i} \quad (12)$$

dove $N|_{E_i}$ commuta con $S_i = \lambda_i Id$ e con T_i , quindi anche con N_i . Ne segue che E_i è invariante per N_i . Inoltre, essendo N_i e $N|_{E_i}$ entrambi nilpotenti, è tale anche $N_i - N|_{E_i}$. Infatti, se $(N_i)^p = 0$ e $(N|_{E_i})^q = 0$, ponendo $M = \max\{p, q\}$ si ha:

$$(N_i - N|_{E_i})^{2M} = \sum_{j=0}^{2M} \binom{2M}{j} (N_i)^j (N|_{E_i})^{2M-j} = 0$$

in quanto $\max_{0 \leq j \leq 2M} \{j, 2M - j\} \geq M$. Per la (12) l'operatore $S|_{E_i} - S_i$ è rappresentato da una matrice diagonale nilpotente, ma l'unica matrice che verifica tali condizioni è la matrice nulla. Quindi $S_i = S|_{E_i}$, nonché $N_i = N|_{E_i}$. \square

Esempio 5.7. Sia $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'operatore:

$$T \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 - 2x_3 \\ -x_2 + 4x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico è $p_T = (x + 1)^2(x - 1)$. Vi sono quindi due autovalori $\lambda_1 = -1$ con molteplicità algebrica $m_1 = 2$ e $\lambda_2 = 1$ con $m_2 = 1$. La successione dei nuclei delle potenze di $T + Id$ si stabilizza con l'esponente 2; possibili loro basi sono:

$$\text{Ker}(T + Id) : \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad \text{Ker}((T + Id)^2) : \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Ciò è sufficiente per scrivere la forma canonica di Jordan di T e la sua scomposizione in due matrici associate agli operatori S e N , come definiti nel Teorema 5.6, rispetto a una base di Jordan:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{S}_{\mathcal{J}} + \mathbf{N}_{\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le due matrici sono chiaramente una diagonalizzabile (è diagonale), l'altra nilpotente (è triangolare superiore con diagonale principale nulla). Può però risultare più comodo convertirle in matrici associate rispetto alla base canonica. Una base di Jordan può essere costituita dai vettori $T(\mathbf{z}_1) = (1, 0, 0)$, $\mathbf{z}_1 = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{z}_2 = (0, 2, 1)$, in quanto $\{\mathbf{z}_2\}$ è una possibile base per $\text{Ker}(T - Id)$. La matrice di conversione da tale base alla base canonica e la sua inversa sono:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si ha quindi non solo $\mathbf{Q}\mathbf{J}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{T}$, ma anche $\mathbf{S} = \mathbf{Q}\mathbf{S}_{\mathcal{J}}\mathbf{Q}^{-1}$ e $\mathbf{N} = \mathbf{Q}\mathbf{N}_{\mathcal{J}}\mathbf{Q}^{-1}$, quindi:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{S} + \mathbf{N} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si verifica agevolmente che \mathbf{S} è diagonalizzabile, \mathbf{N} nilpotente e $\mathbf{S}\mathbf{N} = \mathbf{N}\mathbf{S}$. ||

6 Forma reale di Jordan

Il Teorema 5.1 afferma che, dato un operatore $T : V \rightarrow V$, se il polinomio minimo è completamente riducibile su \mathbb{K} esiste sempre una forma canonica di Jordan di T . È cioè sempre possibile associare all'operatore una matrice quasi diagonale, quindi di struttura molto semplice.

Se V è uno spazio vettoriale complesso, il Teorema fondamentale dell'algebra assicura che la condizione di completa riducibilità è sempre soddisfatta. Se invece V è uno spazio vettoriale reale, può succedere che vi siano sia autovalori reali, sia autovalori complessi. In questi casi, è certo possibile intendere V come spazio vettoriale complesso (un numero reale può essere visto come un numero complesso con parte immaginaria nulla), ma è anche possibile convertire una forma di Jordan con autovalori complessi in una cosiddetta *forma reale* in cui compaiono solo elementi reali.

Definizione 6.1. Dato un operatore $T : V \rightarrow V$, se $\lambda = a + ib$ è un suo autovalore complesso, si dice *blocco di Jordan reale* di ordine $2s$, e si indica con $\mathbf{J}_{2s}^{\mathbb{R}}(\lambda)$, una matrice $2s \times 2s$ una matrice avente s blocchi $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ sulla diagonale principale e $s - 1$

blocchi $\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sulla diagonale immediatamente superiore:

$$\mathbf{J}_{2s}^{\mathbb{R}}(\lambda) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{I}_2 & & & \\ & \mathbf{C} & \mathbf{I}_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \mathbf{C} & \mathbf{I}_2 \\ & & & & \mathbf{C} \end{bmatrix}$$

Anche per i blocchi reali di Jordan esiste una definizione alternativa, secondo cui i blocchi \mathbf{I}_2 sono sotto la diagonale principale (v. §6.5).

Definizione 6.2. Una matrice quadrata $\mathbf{J}^{\mathbb{R}}$ viene detta *matrice reale di Jordan* se è una matrice diagonale a blocchi in cui ciascun blocco è un blocco di Jordan $\mathbf{J}_r(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, oppure un blocco reale di Jordan $\mathbf{J}_{2s}^{\mathbb{R}}(\lambda)$, $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$.

6.1 Complessificazione di spazi vettoriali reali

Si ha $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{C}^n$ in quanto i numeri reali possono essere visti come numeri complessi con parte immaginaria nulla.

Sia W un sottospazio complesso di \mathbb{C}^n . L'insieme $W_{\mathbb{R}} = W \cap \mathbb{R}^n$ contiene tutte le n -ple (z_1, \dots, z_n) di numeri reali (numeri complessi con parte immaginaria nulla). Chiaramente $W_{\mathbb{R}}$ contiene il vettore nullo ed è chiuso rispetto alle operazioni di somma di vettori e moltiplicazione per uno scalare reale, quindi è uno spazio vettoriale reale. Come si può ricavare uno spazio vettoriale reale da uno complesso, si può anche estendere uno spazio vettoriale reale semplicemente introducendo la moltiplicazione per scalari complessi.

Definizione 6.3. Dato uno spazio vettoriale reale $V \subseteq \mathbb{R}^n$, viene detto *complessificazione* di V lo spazio vettoriale $V_{\mathbb{C}}$ costituito da tutte le combinazioni lineari dei vettori \mathbf{x} in V con coefficienti complessi:

$$V_{\mathbb{C}} = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n : \mathbf{z} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i \in V, \alpha_i \in \mathbb{C} \right\}$$

Per ciascun numero complesso $z = a + ib$ esiste il numero complesso coniugato $\bar{z} = a - ib$. È quindi possibile definire un'applicazione che trasforma un numero complesso nel suo coniugato.

Definizione 6.4. Si dice *coniugio* l'applicazione $\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ che trasforma un numero complesso z nel suo coniugato \bar{z} .

Si ha ovviamente che $\sigma^2 = \sigma \circ \sigma$ è una trasformazione identica: se $z = a + ib$, $\sigma(z) = a - ib$ e $\sigma(\sigma(z)) = a + ib = z$. Peraltro, se $b = 0$, se cioè z è un numero reale, si ha anche $\sigma(z) = z$.

L'applicazione coniugio è facilmente estensibile ai vettori \mathbf{z} di \mathbb{C}^n , intendendo che agisce su tutti i loro elementi:

$$\sigma(\mathbf{z}) = \sigma(z_1, \dots, z_n) = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n) = \bar{\mathbf{z}}$$

6.2 Complessificazione di operatori lineari

Definizione 6.5. Dato un operatore lineare $T : V \rightarrow V$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$, viene detto *complessificazione* di T l'operatore $T_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$, $V_{\mathbb{C}} \subseteq \mathbb{C}^n$, tale che, per ogni $\mathbf{z} = \sum \alpha_i \mathbf{x}_i$, con $\mathbf{x}_i \in V$ e $\alpha_i \in \mathbb{C}$, sia:

$$T_{\mathbb{C}}(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T \mathbf{x}_i$$

In sostanza, si può complessificare V semplicemente ammettendo la moltiplicazione dei suoi vettori per scalari complessi. Fatto questo, segue dalla linearità di T la possibilità di definire $T_{\mathbb{C}}$. Infatti, se gli scalari α_i fossero reali, sarebbe sempre possibile trovare vettori \mathbf{x}_i tali da esprimere un qualsiasi vettore $\mathbf{v} \in V$ come loro combinazione lineare (basterebbe prendere gli elementi di una base di V) e si avrebbe $T(\mathbf{v}) = T(\sum \alpha_i \mathbf{x}_i) = \sum \alpha_i T(\mathbf{x}_i)$. Si ha lo stesso se gli α_i sono complessi, con la differenza che anche \mathbf{v} è complesso, quindi appartiene a $V_{\mathbb{C}}$. Inoltre, da un lato anche gli \mathbf{x}_i appartengono a $V_{\mathbb{C}}$ (sono numeri complessi con parte immaginaria nulla), dall'altro gli $\alpha_i \mathbf{x}_i$ con $\alpha_i \in \mathbb{C}$ sono complessi e si può leggere \mathbf{z} come combinazione lineare dei vettori $\alpha_i \mathbf{x}_i \in V_{\mathbb{C}}$ con coefficienti tutti pari a 1. Ha quindi senso definire l'applicazione $T_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$.

Ne deriva, tra l'altro, che se \mathcal{B} è una base di V è anche una base di $V_{\mathbb{C}}$, che se \mathbf{T} è la matrice associata a T la stessa matrice è associata anche a $T_{\mathbb{C}}$ e che T e $T_{\mathbb{C}}$ hanno lo stesso polinomio caratteristico.

È utile da chiedersi a quali condizioni un operatore $S : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$ può essere visto come la complessificazione di un operatore $T : V \rightarrow V$.

Lemma 6.6. *Siano $V \subseteq \mathbb{R}^n$ uno spazio vettoriale reale e $V_{\mathbb{C}} \subseteq \mathbb{C}^n$ la sua complessificazione. Se S è un'operatore lineare su $V_{\mathbb{C}}$, può aversi $S = T_{\mathbb{C}}$ per qualche operatore lineare T su V , cioè S può essere la complessificazione di un operatore lineare su uno spazio vettoriale reale, se e solo se l'operatore S commuta con l'applicazione coniugio σ definita su $V_{\mathbb{C}}$:*

$$S = T_{\mathbb{C}} \quad \Leftrightarrow \quad S\sigma = \sigma S$$

Dimostrazione. Se $S = T_{\mathbb{C}}$, si ha:

$$\begin{aligned} S\sigma(\mathbf{z}) &= S\sigma\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{x}_i\right) = S\left(\sum_{i=1}^n \bar{\alpha}_i \mathbf{x}_i\right) = T_{\mathbb{C}}\left(\sum_{i=1}^n \bar{\alpha}_i \mathbf{x}_i\right) = \sum_{i=1}^n \bar{\alpha}_i T(\mathbf{x}_i) \\ &= \sigma\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i T(\mathbf{x}_i)\right) = \sigma(T_{\mathbb{C}}(\mathbf{z})) = \sigma S(\mathbf{z}) \end{aligned}$$

Viceversa, se S commuta con σ , allora $S(V) \subseteq V$; infatti se $\mathbf{x} \in V$, allora $\sigma \mathbf{x} = \mathbf{x}$, quindi $\sigma S \mathbf{x} = S \sigma \mathbf{x} = S \mathbf{x}$. Ne segue:

$$S \mathbf{x} \in \{\mathbf{y} \in V_{\mathbb{C}} : \sigma(\mathbf{y}) = \mathbf{y}\} = V$$

ovvero, la restrizione di S a V è uguale a T , ma vale lo stesso per $T_{\mathbb{C}}$, quindi $S = T_{\mathbb{C}}$. \square

Il Lemma 6.6 chiarisce che, mentre è sempre possibile complessificare un operatore reale T , non è detto che esista sempre un operatore reale T di cui un operatore complesso S sia la complessificazione. Da altro punto di vista, quello che rileva in questa sede, se un operatore è complessificazione di un operatore lineare su uno spazio vettoriale reale allora commuta con l'applicazione coniugio.

6.3 Operatori reali con autovalori complessi

Lemma 6.7. *Se T è un operatore lineare in uno spazio vettoriale reale V di dimensione n , i suoi autovalori possono essere reali o coppie di complessi coniugati:*

$$\begin{cases} \lambda_1, \dots, \lambda_r & \text{reali} \\ \zeta_1, \bar{\zeta}_1, \dots, \zeta_s, \bar{\zeta}_s & \text{non reali (complessi coniugati)} \end{cases}$$

con $r + 2s = n$. Gli autovettori corrispondenti a una coppia di autovalori complessi coniugati sono a loro volta complessi coniugati.

Dimostrazione. La prima parte non è altro che una diretta conseguenza del Teorema fondamentale dell'algebra. Per il resto, l'operatore T e il suo complessificato $T_{\mathbb{C}}$ hanno lo stesso polinomio caratteristico, quindi gli stessi autovalori. Se ζ è un autovalore di $T_{\mathbb{C}}$ e \mathbf{z} è il corrispondente autovettore, se cioè:

$$T_{\mathbb{C}}(\mathbf{z}) = \zeta \mathbf{z}$$

applicando l'operazione di coniugio a entrambi i lati si ha:

$$\sigma(T_{\mathbb{C}}(\mathbf{z})) = \bar{\zeta} \bar{\mathbf{z}}$$

e inoltre, per il Lemma 6.6,

$$\sigma(T_{\mathbb{C}}(\mathbf{z})) = T_{\mathbb{C}}(\sigma(\mathbf{z})) = T_{\mathbb{C}}(\bar{\mathbf{z}})$$

quindi:

$$T_{\mathbb{C}}(\bar{\mathbf{z}}) = \bar{\zeta} \bar{\mathbf{z}} \quad \square$$

Esempio 6.8. Sia $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'operatore:

$$T \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico e gli autovalori sono:

$$p_T = x^2 - 2x + 5, \quad \zeta = 1 + i2, \quad \bar{\zeta} = 1 - i2$$

L'autovettore relativo a ζ è:

$$\begin{cases} -iz_1 - z_2 = 0 \\ z_1 - iz_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = -i^{-1}z_2 = iz_2 \\ z_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{z} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si trova analogamente che l'autovettore relativo a $\bar{\zeta}$ è $\bar{\mathbf{z}} = (-i, 1)$. ||

Il teorema che segue mostra che a un operatore su uno spazio vettoriale reale di dimensione 2 con 2 autovalori complessi coniugati può essere associata una matrice reale di Jordan comprendente un solo blocco $\mathbf{J}_2(\zeta)$.

Teorema 6.9. Sia $T : V \rightarrow V$ un operatore su un sottospazio bidimensionale $V \subseteq \mathbb{R}^n$ con due autovalori complessi $\zeta = a + ib$ e $\bar{\zeta} = a - ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$. Siano inoltre $\mathbf{u} \pm i\mathbf{v}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}$, gli autovettori relativi a $\zeta, \bar{\zeta}$. La matrice associata a T rispetto alla base $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ è la matrice reale non singolare:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Dimostrazione. Dati gli autovalori $\zeta, \bar{\zeta}$, siano $\mathbf{u} + i\mathbf{v}$ e $\mathbf{u} - i\mathbf{v}$, con $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, i relativi autovettori. Essi appartengono a $V_{\mathbb{C}}$, cioè $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, in quanto in caso contrario si avrebbe uguaglianza tra un vettore reale e uno non reale:

$$T(\mathbf{u}) = (a + ib)\mathbf{u}$$

Analogamente, se fosse $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ si avrebbe $T(i\mathbf{v}) = iT(\mathbf{v}) = i(a + ib)\mathbf{v}$ da cui seguirebbe $T(\mathbf{v}) = (a + ib)\mathbf{v}$. I vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} sono anche linearmente indipendenti e costituiscono pertanto una base di V , infatti se fosse $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$ si avrebbe ancora:

$$T(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) = T((c + i)\mathbf{v}) = (a + ib)(c + i)\mathbf{v} \Rightarrow T(\mathbf{v}) = (a + ib)\mathbf{v}$$

Dalle due uguaglianze:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) &= (a + ib)(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) = (a\mathbf{u} - b\mathbf{v}) + i(b\mathbf{u} + a\mathbf{v}) \\ T(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) &= T(\mathbf{u}) + iT(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

segue $T(\mathbf{u}) = a\mathbf{u} - b\mathbf{v}$, $T(\mathbf{v}) = b\mathbf{u} + a\mathbf{v}$. La matrice associata a T rispetto alla base $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ è quindi $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$. \square

Esempio 6.10. Sia $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'operatore:

$$T \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -2x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori sono $\zeta = 1 + i$ e $\bar{\zeta} = 1 - i$, i relativi autovettori sono $(-1 + i, 1)$ e $(-1 - i, 1)$, con $\mathbf{u} = (-1, 1)$ e $\mathbf{v} = (1, 0)$. Rispetto alla base \mathcal{V} costituita dagli autovettori, la matrice associata a T è $\mathbf{D} = \text{diag}(\zeta, \bar{\zeta})$ e si ha:

$$\mathbf{VDV}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 + i & -1 - i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + i & 0 \\ 0 & 1 - i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i/2 & (1 - i)/2 \\ i/2 & (1 + i)/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Se $\mathbf{x} = (1, 2)$ si ha $T(\mathbf{x}) = (-4, 5)$. Convertendo \mathbf{x} in coordinate rispetto a \mathcal{V} :

$$\text{Coord}_{\mathcal{V}}(\mathbf{x}) = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -i/2 & (1 - i)/2 \\ i/2 & (1 + i)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - i3/2 \\ 1 + i3/2 \end{bmatrix}$$

l'immagine che si ottiene premoltiplicando per \mathbf{D} è la stessa:

$$\mathbf{y}_{\mathcal{V}} = \mathbf{D}(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 + i & 0 \\ 0 & 1 - i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - i3/2 \\ 1 + i3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (5 - i)/2 \\ (5 + i)/2 \end{bmatrix}$$

come si vede tornando alle coordinate rispetto alla base canonica \mathcal{E} :

$$\text{Coord}_{\mathcal{E}}(\mathbf{y}_{\mathcal{V}}) = \mathbf{V}(\mathbf{DV}^{-1}\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -1 + i & -1 - i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (5 - i)/2 \\ (5 + i)/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Rispetto alla base $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, la matrice $\mathbf{J}^{\mathbb{R}}$ associata a T è:

$$\zeta = 1 + i \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J}^{\mathbb{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si ha infatti:

$$\mathbf{Q}\mathbf{J}^{\mathbb{R}}\mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

e pertanto $\mathbf{Q}\mathbf{J}^{\mathbb{R}}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x} = (-4, 5)$. ||

Osservazione 6.11. Dal momento che la similitudine è una relazione di equivalenza, il Teorema 6.9 implica (e l'Esempio 6.10 mostra) che le matrici:

$$\begin{bmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \bar{\zeta} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

sono simili, in quanto entrambe simili alla matrice associata rispetto alla base canonica.

6.4 Dalla forma canonica alla forma reale

Teorema 6.12. *Se l'operatore $T : V \rightarrow V$, con $V \subseteq \mathbb{R}^n$, possiede autovalori non reali, esiste una base di vettori in V rispetto alla quale la matrice associata è una matrice reale di Jordan.*

Dimostrazione. L'operatore complessificato $T_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$ è simile a una matrice di Jordan per il Teorema 5.1. Per il Lemma 6.7 a ciascuna coppia di autovalori complessi coniugati corrispondono autovettori complessi coniugati.

Se la molteplicità algebrica di un autovalore complesso $\zeta = a + ib$ è 1, la coppia dà luogo a due blocchi di Jordan di ordine 1 che costituiscono una sottomatrice diagonale simile a un blocco reale di Jordan di ordine 2 (Osservazione 6.9):

$$\mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \bar{\zeta} \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_2^{\mathbb{R}}(\zeta) = \mathbf{C} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Si ha infatti, per $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -i & -i \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$:

$$\mathbf{S}\mathbf{D}_2\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} -i & -i \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a + ib & 0 \\ 0 & a - ib \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i/2 & 1/2 \\ i/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \mathbf{J}_2^{\mathbb{R}}(\zeta)$$

Il Teorema 6.9 mostra come comporre la base del sottospazio $W \subseteq V$ rispetto alla quale la restrizione di T a W è rappresentata dalla matrice $\mathbf{J}_2^{\mathbb{R}}(\zeta)$.

Per qualsiasi sottomatrice costituita da una coppia di blocchi di Jordan di ordine $s > 1$, il primo per un autovalore ζ e il secondo per il suo coniugato $\bar{\zeta}$, esiste un blocco reale di ordine $2s$ simile ad essa. La dimostrazione è identica a quella, più agile, per $s = 2$. La sottomatrice costituita da due blocchi di Jordan di ordine 2:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_2(\zeta) & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{J}_2(\bar{\zeta}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\zeta} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\zeta} \end{bmatrix} \quad (13)$$

6. FORMA REALE DI JORDAN

è simile per permutazione alla matrice che si ottiene scambiando le righe e le colonne seconda e terza:

$$\begin{bmatrix} \zeta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \bar{\zeta} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_2(\zeta) & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{O} & \mathbf{D}_2(\zeta) \end{bmatrix} \quad (14)$$

I due blocchi $\mathbf{D}_2(\zeta)$ sono identici al blocco trovato sopra per $s = 1$. La sottomatrice da loro formata è quindi simile a un blocco reale di Jordan di ordine 4:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_2(\zeta) & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{O} & \mathbf{D}_2(\zeta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{S} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -i & -i & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & -i \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a+ib & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a-ib & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a+ib & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-ib \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{i}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{i}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{i}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{O} & \mathbf{C} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_4^{\mathbb{R}}(\zeta) \end{aligned}$$

La matrice (13) è associata alla restrizione T a un sottospazio $W \subseteq V$ rispetto a una base \mathcal{J} costituita da vettori complessi coniugati individuati come indicato dal Teorema 5.1. La matrice (14) è associata alla stessa restrizione di T rispetto a una base costituita da due coppie di vettori reali che si ottengono come indicato dal Teorema 6.9, dopo aver operato su \mathcal{J} la stessa permutazione di colonne che ha condotto dalla (13) alla (14). Analogamente per blocchi di dimensione maggiore. \square

Esempio 6.13. Sia $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'operatore:

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8x_4 \\ x_1 + 16x_4 \\ x_2 - 14x_4 \\ x_3 + 6x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico è $p_T = (x-2)^2(x^2-2x+2)$. Vi sono quindi un autovalore reale $\lambda = 2$ con molteplicità algebrica $m_1 = 2$ e la coppia di autovalori complessi coniugati $1 \pm i$, ciascuno con molteplicità algebrica 1. Possibili basi per gli autospazi sono:

$$\text{Ker}(T - 2Id) : \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{Ker}(T - (1 \pm i)Id) : \left\{ \begin{pmatrix} -4 \pm i4 \\ 8 \mp i4 \\ -5 \pm i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Poiché $\lambda = 2$ ha molteplicità geometrica $\gamma_1 = 1$, c'è un solo blocco di Jordan per λ , il cui ordine non può che essere $m_1 = 2$. La forma canonica di Jordan e la forma reale sono

6. FORMA REALE DI JORDAN

quindi:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-i \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}^{\mathbb{R}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

In questo caso non c'è permutazione di colonne. Per trovare basi idonee è sufficiente:

a) trovare una base di Jordan per l'autovalore reale; una base per $\text{Ker}((T - 2Id)^2)$ può essere:

$$\text{Ker}((T - 2Id)^2) : \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

nessuno dei due appartiene a $\text{Ker}(T - 2Id)$; scegliendo il secondo, la base di Jordan cercata è:

$$\{(T - 2Id)\mathbf{z}_1 = (-4, 6, -4, 1), \mathbf{z}_1 = (2, -2, 1, 0)\}$$

b) completare la base di Jordan per T aggiungendo gli autovettori associati a $1 \pm i$, quelli che formano la base sopra trovata per $\text{Ker}(T - (1 \pm i)Id)$;

c) completare la base reale per T aggiungendo due vettori reali \mathbf{u}, \mathbf{v} tali che gli autovettori associati a $1 \pm i$ siano uguali a $\mathbf{u} \pm i\mathbf{v}$:

$$\mathbf{u} = (-4, 8, -5, 1), \quad \mathbf{v} = (4, -4, 1, 0)$$

Si ottiene così:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -4+i4 & -4-i4 \\ 6 & -2 & 8-i4 & 8+i4 \\ -4 & 1 & -5+i & -5-i \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -4 & 4 \\ 6 & -2 & 8 & -4 \\ -4 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e si può verificare che $\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}\mathbf{J}^{\mathbb{R}}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{T}$. ||

Esempio 6.14. Sia $T : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ l'operatore con matrice associata:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ 3 & -1 & 3 & 1 & 0 & -6 \\ 6 & -6 & 5 & 0 & 1 & -6 \\ 7 & -7 & 4 & -2 & 4 & -7 \\ 6 & -6 & 6 & -6 & 5 & -6 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico è $p_T = (x^2 - 4x + 13)^3$. Vi sono quindi due autovalori complessi coniugati $2 \pm i3$, ciascuno con molteplicità algebrica 3. Possibili basi per i nuclei delle

6. FORMA REALE DI JORDAN

potenze di $T - (2 + i3)Id$ sono:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1+i \\ i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \left\{ \begin{bmatrix} 1+i \\ i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -i \\ 1-i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \left\{ \begin{bmatrix} 1+i \\ i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -i \\ 1-i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1+i \\ i2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{Ker}(T - (2 + i3)Id) \quad \text{Ker}((T - (2 + i3)Id)^2) \quad \text{Ker}((T - (2 + i3)Id)^3)$$

Nelle corrispondenti basi per $2 - i3$ compaiono vettori coniugati. I due autovalori hanno molteplicità geometrica 1, quindi un unico blocco di Jordan di ordine pari alla molteplicità algebrica 3. La forma di Jordan di T è quindi:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2+i3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+i3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-i3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-i3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2-i3 \end{bmatrix}$$

Per costruire la forma reale di T occorre avvicinare le singole occorrenze dell'autovalore e del suo coniugato. È semplice, ma si può anche usare una matrice di permutazione:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e si ha:

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{J}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2+i3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-i3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+i3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-i3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2+i3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2-i3 \end{bmatrix}$$

Ora basta sostituire i blocchi $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2+i3 & 0 \\ 0 & 2-i3 \end{bmatrix}$ con blocchi $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$:

$$\mathbf{J}^{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

6. FORMA REALE DI JORDAN

Quanto alle basi, una base di Jordan è costituita da due terne di vettori. La prima terna contiene un vettore \mathbf{z} appartenente a $\text{Ker}((T - (2 + i3)Id)^3)$ ma non a $\text{Ker}((T - (2 + i3)Id)^2)$ e le sue due successive moltiplicazioni per $T - (2 + i3)Id$:

$$\begin{aligned}\mathbf{z} &= (0, 1 + i, i2, 0, 2, 0) \\ \mathbf{y} &= (T - (2 + i3)Id)(\mathbf{z}) = (i2, 0, 2, 1 + i, 0, 1 + i) \\ \mathbf{x} &= (T - (2 + i3)Id)^2(\mathbf{z}) = (2, 1 + i, 0, 0, 0, 1 - i)\end{aligned}$$

Scrivendo i vettori in ordine alfabetico e affiancando poi l'analogia terna dei vettori coniugati $\bar{\mathbf{x}}$, $\bar{\mathbf{y}}$ e $\bar{\mathbf{z}}$, si ottiene:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & i2 & 0 & 2 & -i2 & 0 \\ 1 + i & 0 & 1 + i & 1 - i & 0 & 1 - i \\ 0 & 2 & i2 & 0 & 2 & -i2 \\ 0 & 1 + i & 0 & 0 & 1 - i & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 - i & 1 + i & 0 & 1 + i & 1 - i & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{AJA}^{-1} = \mathbf{T}$$

Per una base reale si potrebbe iniziare permutando le colonne di \mathbf{A} con \mathbf{AP} , in modo da avere ciascun vettore accanto al suo coniugato, ma individuare le coppie di vettori reali $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i, i \in \{1, 2, 3\}$, è semplice. Ad esempio, \mathbf{u}_1 non è altro che il vettore delle parti reali della prima colonna, $(2, 1, 0, 0, 0, 1)$, mentre \mathbf{v}_1 è il vettore dei coefficienti reali delle parti immaginarie, $(0, 1, 0, 0, 0, -1)$:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{BJ}^{\mathbf{R}}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{T} \quad \parallel$$

6.5 Forma alternativa

Secondo la definizione alternativa, una matrice reale di Jordan è triangolare inferiore a blocchi. Scrivere una matrice di tale tipo è semplice. Quanto a una base rispetto alla quale essa è simile ad altre matrici associabili a un dato operatore,

- a) i vettori corrispondenti ai blocchi di Jordan per uno stesso autovalore vengono scritti prendendo da destra verso sinistra (in ordine alfabetico inverso) i vettori che compaiono nelle righe di un diagramma di Young (§4.2 e §5.1);
- b) ciascuno dei blocchi reali per una coppia di autovalori $a \pm ib$ assume la forma $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, con $b > 0$; se vi sono più blocchi, le coppie di vettori vanno disposte in ordine inverso e, nell'ambito di ciascuna coppia, i due vettori vanno scambiati di posto:

$$\text{da: } \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{u}_s, \mathbf{v}_s \quad \text{a: } \mathbf{v}_s, \mathbf{u}_s, \dots, \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_1$$

Esempio 6.15. La matrice reale per l'operatore dell'Esempio 6.13 può essere scritta nella forma:

$$\mathbf{J}^{\mathbb{R}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi sono solo un blocco per l'autovalore reale e solo uno per la coppia $1 \pm i$. I vettori della base trovata nell'Esempio 6.13 vanno quindi riordinati semplicemente scambiando il primo col secondo (per l'autovalore reale) e il terzo col quarto (per la coppia di autovalori complessi coniugati):

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 & -4 \\ -2 & 6 & -4 & 8 \\ 1 & -4 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e si ha ancora $\mathbf{B}\mathbf{J}^{\mathbb{R}}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{T}$. ||

Esempio 6.16. La matrice reale per l'operatore dell'Esempio 6.14 può essere riscritta come triangolare inferiore a blocchi. Vi sono tre blocchi per la coppia di autovalori $2 \pm i3$, quindi si deve invertire l'ordine delle coppie di vettori della base trovata nell'Esempio 6.14, poi scambiarli di posto nell'ambito di ciascuna coppia:

$$\mathbf{J}^{\mathbb{R}} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e si ha $\mathbf{B}\mathbf{J}^{\mathbb{R}}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{T}$. ||

6.6 Scomposizione semisemplice-nilpotente

Definizione 6.17. Un operatore $T : V \rightarrow V$ viene detto *semplice* se è diagonalizzabile; se $V \subseteq \mathbb{R}^n$, T viene detto *semisemplice* se è diagonalizzabile la sua complessificazione.

Il Teorema 5.6 assicura che un operatore $T : V \rightarrow V$, anche se non diagonalizzabile, può comunque essere scomposto nella somma di un operatore diagonalizzabile S e di un operatore nilpotente N , purché il suo polinomio minimo sia completamente riducibile. La condizione è sempre soddisfatta se V è uno spazio vettoriale complesso. Se invece V è uno spazio vettoriale reale, si rientra nelle condizioni del teorema passando per la complessificazione di T e di V , si ha cioè:

$$T_{\mathbb{C}} = S_{\mathbb{C}} + N_{\mathbb{C}}$$

La forma reale di Jordan consente di trovare una base reale di V rispetto alla quale è possibile scomporre T nella somma di un operatore reale semisemplice e di un operatore reale nilpotente. All'operatore reale semisemplice, inoltre, è possibile associare una matrice reale diagonale a blocchi, con blocchi del tipo $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ per ciascun autovalore complesso $\zeta = a \pm ib$.

Esempio 6.18. Sia $T = \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'operatore:

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ -x_4 \\ 2x_1 + x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico è $p_T = (x^2+1)^2$, gli autovalori sono $\pm i$ con molteplicità algebrica 2. Per $\zeta = i$, possibili basi delle potenze di $T - \zeta Id$ sono:

$$\text{Ker}(T - iId) : \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \text{Ker}((T - iId)^2) : \left\{ \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Le forme canonica e reale di Jordan sono:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}^{\mathbb{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Restando alla base di Jordan, si ha evidentemente:

$$\mathbf{J} = \mathbf{S}_{\mathcal{J}} + \mathbf{N}_{\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Una base di Jordan può essere costituita dai vettori $T(i, 1, 0, 1) = (0, 0, -1, i)$ e $(i, 1, 0, 1)$ e dai loro coniugati. La matrice di conversione da tale base alla canonica e la sua inversa sono:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & i & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ i & 1 & -i & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & i/2 & -1/2 & -i/2 \\ -i/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -i/2 & -1/2 & i/2 \\ i/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcolando $\mathbf{S}_1 = \mathbf{A}\mathbf{S}_{\mathcal{J}}\mathbf{A}^{-1}$ e $\mathbf{N}_1 = \mathbf{A}\mathbf{N}_{\mathcal{J}}\mathbf{A}^{-1}$ si ottiene:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Sia $\mathbf{S}_{\mathcal{J}}$ che \mathbf{S}_1 sono semisemplici, perché diagonalizzabili ma con autovalori ancora $\pm i$, mentre sia $\mathbf{N}_{\mathcal{J}}$ che \mathbf{N}_1 sono nilpotenti. Passando alla forma reale di Jordan, si ha:

$$\mathbf{J}^{\mathbb{R}} = \mathbf{S}_{\mathcal{J}^{\mathbb{R}}} + \mathbf{N}_{\mathcal{J}^{\mathbb{R}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Una possibile base reale di Jordan è costituita dai vettori $\mathbf{u}_1 = (0, 0, -1, 0)$, $\mathbf{v}_1 = (0, 0, 0, 1)$ (parti reali e coefficienti delle parti immaginare della prima colonna della matrice \mathbf{A}), $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 0, 1)$ e $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 0, 0)$ (come sopra per la seconda colonna). La matrice di conversione da tale base alla canonica e la sua inversa sono:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcolando $\mathbf{S}_2 = \mathbf{B}\mathbf{S}_{\mathcal{J}\mathbb{R}}\mathbf{B}^{-1}$ e $\mathbf{N}_2 = \mathbf{B}\mathbf{N}_{\mathcal{J}\mathbb{R}}\mathbf{B}^{-1}$ si ottiene:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{S}_2 + \mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Anche in questo caso, sia $\mathbf{S}_{\mathcal{J}\mathbb{R}}$ che \mathbf{S}_2 sono semisemplici, sia $\mathbf{N}_{\mathcal{J}\mathbb{R}}$ che \mathbf{N}_2 sono nilpotenti. Si può anche notare che la (16) e la (18) sono uguali, in quanto la base di riferimento è in entrambi i casi quella canonica, e che la scomposizione più comoda è la (17) in quanto all'operatore reale semisemplice è associata, rispetto a una base reale (i vettori colonna di \mathbf{B}), una matrice diagonale a blocchi con blocchi del tipo $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$. ||

Riferimenti bibliografici

- Brauer, Fred e John A. Nohel (1973), *Ordinary Differential Equations. A First Course*, Menlo Park, CA: Benjamin.
- Cullen, Charles G. (1990), *Matrices and Linear Transformations*, 2^a ed., New York: Dover.
- Gentile, Guido (2009), *Introduzione ai sistemi dinamici. 1. Equazioni differenziali lineari, analisi qualitativa e alcune applicazioni*, <http://www.mat.uniroma3.it/users/gentile/2014-2015/FM410/testo.html>.
- Hirsch, Morris D. e Stephen Smale (1974), *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, San Diego, CA: Academic Press.
- Horn, Roger A. e Charles A. Johnson (1990), *Matrix analysis*, New York: Cambridge University Press.
- Lotta, A. (2003), *Forma canonica di Jordan*, <http://www.dm.uniba.it/~lotta/dispjordan2003.pdf>.
- Meyer, Carl D. (2000), *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, Philadelphia, PA: SIAM.